

Teoria de la relativitat restringida i general per a beginners

J. Planelles

Revisió d'alguns conceptes matemàtics

Producte escalar de dos vectors amb mètrica $g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$

$$\hat{v}_a = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3$$

$$\hat{v}_b = b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = g_{ij} \neq \delta_{ij}$$

$$\hat{v}_a \cdot \hat{v}_b = \sum_{ij} a_i b_j g_{ij}$$

$$\hat{v}_a \cdot \hat{v}_a = \sum_{ij} a_i a_j g_{ij}$$

$$g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$$

Coordenades curvilínies $q_j(x_i)$

$$d\hat{r} = \sum_i dx_i \hat{e}_i$$

$$dx_i = \sum_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) dq_j$$

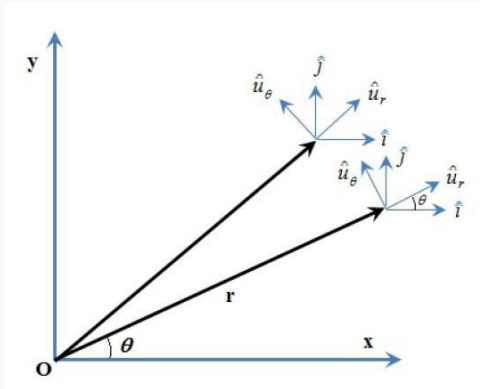
$$d\hat{r} = \sum_{kj} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) dq_j \hat{e}_k$$



$$ds^2 = d\hat{r} \cdot d\hat{r} = \sum_{js} g_{js} dq_j dq_s$$

$$g_{js} = \sum_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_s} \right)$$

Derivada d'un vector



coordenades cartesianes:

$$\hat{V}(x, y) = V_x(x, y) \hat{i} + V_y(x, y) \hat{j}$$

$$\frac{\partial \hat{V}(x, y)}{\partial x_i} = \frac{\partial V_x}{\partial x_i} \hat{i} + \frac{\partial V_y}{\partial x_i} \hat{j}$$

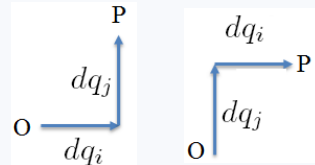
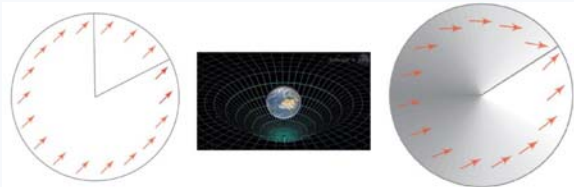
coordenades no cartesianes:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial q_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \hat{u}_k$$

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial q_j} = \sum_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial q_j} \hat{u}_i + \sum_k V_i \Gamma_{ij}^k \hat{u}_k \right) = \sum_i \left(\frac{\partial V_i}{\partial q_j} + \sum_k V_k \Gamma_{kj}^i \right) \hat{u}_i$$

Derivada *covariant* del vector

Tensor de curvatura de Riemann



Espai pla, coordenades cartesianes:

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

Espai curvilini:

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial q_j} \hat{u}_i + V_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial q_j} = \sum_l \Gamma_{ij}^l \hat{u}_l$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial q_j \partial q_k} = \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial q_j} + \sum_r \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^l \right) \hat{u}_l$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_j}, \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} \right] \hat{u}_i = \sum_l \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial q_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial q_j} \right) + \sum_r (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{kr}^l - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l) \right\} \hat{u}_l$$

R_{ikj}^l Tensor de curvatura de Riemann

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial q_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial q_j \partial q_k} = \sum_{il} V_i R_{ikj}^l \hat{u}_l$$

Traces del tensor de curvatura

Tensor d'inèrcia $I_{ii} = \int_V \rho(r^2 - x_i^2) dv$ La traça: $I = \sum_i I_{ii} = \int_V \rho r^2 dv$

Tensor de Ricci: (amb suma sobre índexs repetits)

$$R_{ik} = R_{ik}^j{}_j$$

Propietats: 1. És simètric $R_{ik} = R_{ki}$

2. La seua derivada covariant: $\frac{\partial R_{ik}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (g_{ik} R)$

Tensor de escalar de curvatura (traça del tensor de Ricci):

$$R$$

Tensor d'Einstein:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$$

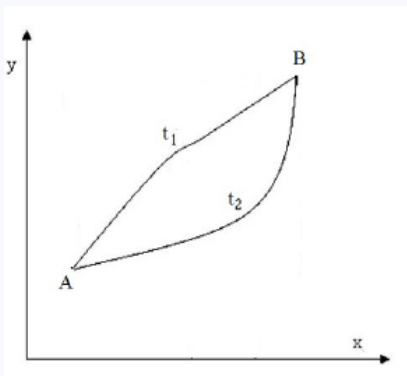
Propietats: 1. Simètric
2. Derivada covariant nul·la

Revisió d'alguns conceptes de Mecànica clàssica no relativista

Principi de mínima acció. Equacions de Lagrange

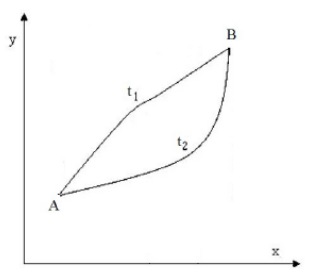
Acció:

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(\dot{x}, x) dt$$



$$\begin{aligned} \delta S = 0 &\rightarrow \int_{t_A}^{t_B} \delta L(\dot{x}, x) dt = 0 \\ &\rightarrow -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Distància més curta entre dos punts



$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$S_{AB} = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad x(t) \text{ i } y(t)$$

$$\delta S = 0 = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{L} = C_1 \quad \longrightarrow \quad y = Cx + C'$$

Trajectòria en absència de Forces

$$L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - V(x, y)$$

absència de Forces

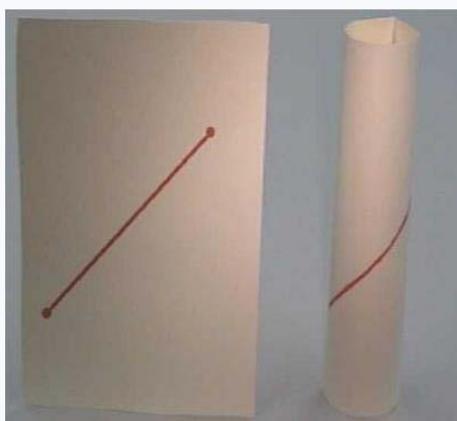
$$L = T(\dot{x}, \dot{y})$$

$$\longrightarrow -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = C_1$$

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = C_2$$

$$\longrightarrow y = Cx + C'$$

Espai curvilini (o presència de potencial)



Espai pla amb presència de potencial:

$$\text{mètrica cartesiana } ds^2 = dt^2 + dx^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - m\Phi(x)$$

Espai curvilini i absència de potencial:

canviem la mètrica del sistema

$$ds^2 = (1 - 2\Phi)dt^2 + dx^2$$

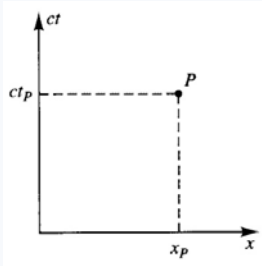
Distància A-B: $S_{AB} = \int_A^B \sqrt{(1 - 2\Phi) + \dot{x}^2} dt$

$$\sqrt{(1 - 2\Phi) + \dot{x}^2} = \sqrt{1 + (\dot{x}^2 - 2\Phi)} \approx 1 + \frac{\dot{x}^2}{2} - \Phi = 1 + \frac{L}{m}$$

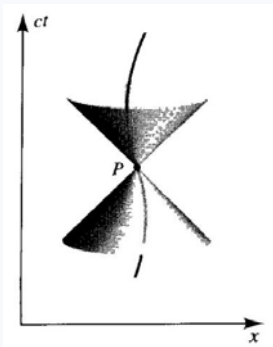
$$S_{AB} = \int_A^B \left(1 + \frac{L}{m}\right) dt = \int_A^B dt + \frac{1}{m} \int_A^B L dt = t_b - t_A + \frac{1}{m} \int_A^B L dt$$

la condició d'extrem en la distancia equival a la mínima acció

Geometria i Física: Diagrama espai-temps de Minkowski



Les coordenades en l'espai-temps (ct_P, x_P, y_P, z_P)



La partícula descriu una línia en l'espai-temps (world line)

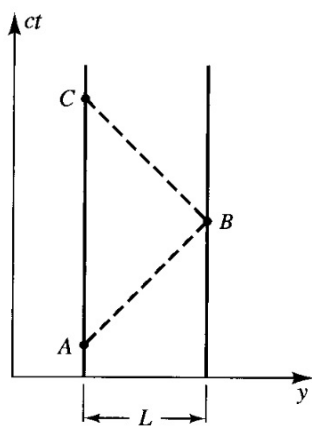
El pendent de la world line: $\frac{d(ct)}{dx} = \frac{c}{v_x}$

Velocitat zero pendent infinita (línia vertical)

Velocitat c pendent unitat (línia diagonal)

--> Les partícules de massa en repòs no zero es mouen amb $v < c$ al llarg de world lines que sempre queden dins del conus de llum

Invariant de l'espai-temps



Sistema inercial de coordenades (ct, x, y, z)

$$\Delta t = \frac{2L}{c}, \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.$$

Sistema inercial (ct', x', y', z') que es mou amb velocitat v respecte (ct, x, y, z) al llarg de la direcció negativa de l'eix x

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \sqrt{L^2 + \left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2} \quad \Delta x' = v \Delta t' \quad \Delta y' = 0 \quad \Delta z' = 0$$

DEFINIM

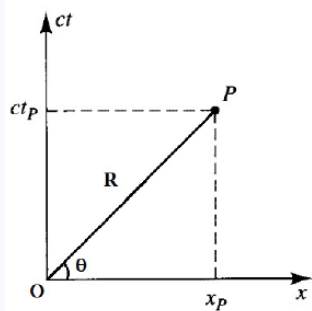
$$\Delta S'^2 = -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

$$\Delta S^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$\Delta S'^2 = \Delta S^2$$

$ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ és invariant
sota canvis de sistemes de referència inercials

Rotacions en l'espai-temps



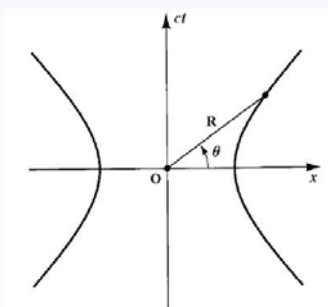
Geometria Euclidiana

$$x = R \cos \theta$$

$$ct = R \sin \theta$$

$$x^2 + (ct)^2 = R^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = R^2$$

L'espai-temps NO és Euclidià:



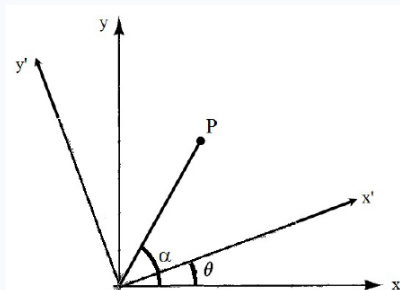
$$R^2 = -(ct)^2 + x^2$$

equació d'una hipèrbola

$$x = R \cosh \theta$$

$$ct = R \sinh \theta$$

$$x^2 - (ct)^2 = R^2(\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta) = R^2$$



Geometria Euclidiana

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Rotació

a l'espai-temps :

$$x = R \cosh \alpha$$

$$ct = R \sinh \alpha$$

$$x' = R \cosh(\alpha - \theta) = R(\cosh \alpha \cosh \theta - \sinh \alpha \sinh \theta) = x \cosh \theta - (ct) \sinh \theta$$

$$y' = R \sinh(\alpha - \theta) = R(\sinh \alpha \cosh \theta - \cosh \alpha \sinh \theta) = -x \sinh \theta + (ct) \cosh \theta$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

Si la partícula està en repòs en el sistema S' : $dx'=0$

$$dx' = dx \cosh \theta - (cdt) \sinh \theta = 0 \rightarrow v = \frac{dx}{dt} = c \tanh \theta$$

$$\rightarrow \tanh \theta = \frac{v}{c}$$

Transformacions en termes de la velocitat

$$\tanh \theta = \frac{v}{c}$$

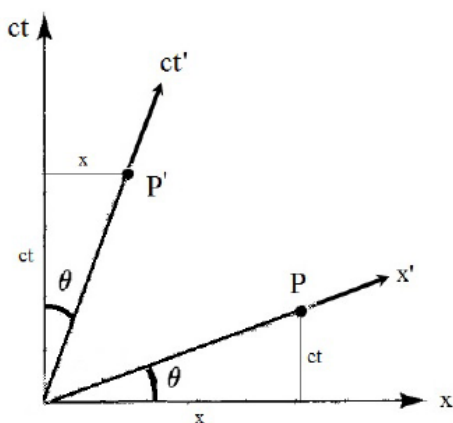
$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1.$$

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$$

$$\sinh \theta = \frac{v}{c} \gamma.$$

$$x' = x \cosh \theta - (ct) \sinh \theta = \gamma (x - vt)$$

$$t' = -\frac{x}{c} \sinh \theta + t \cosh \theta = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$



Procedim ara a representar l'eix x' en el sistema (ct, x) .

Fem, per tant, que $t' = 0 \rightarrow t = \frac{v}{c^2} x \rightarrow ct = \tanh \theta x$ (recta de pendent $\tanh \theta$).

Anàlogament fem $x' = 0$ per trobar l'eix t' .

$x = vt = \frac{v}{c} (ct) = \tanh \theta (ct)$
(recta de pendent $\cotanh \theta$).

Dilatació temporal

En el sistema S' en que la partícula està en repòs anomenem $\tau = t'$,
tanmateix: $dx' = 0$:

$$ds^2 = -(cd\tau)^2$$

En qualsevol sistema de referència ds^2 és el mateix: $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2$

$$\text{amb } v = \frac{dx}{dt}, -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 \rightarrow \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma}$$

el temps propi és sempre menor que el que es mesura des d'un sistema no soldat a la partícula

Contracció espacial

$$\Delta x^2 = \Delta x'^2 - (c\Delta t')^2$$

$$\Delta t = 0 = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x' \right) \longrightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x'$$



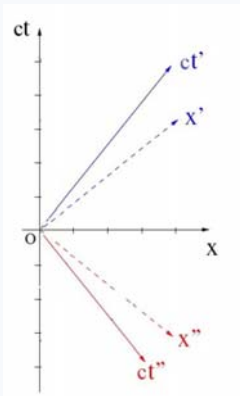
$$\Delta x^2 = \Delta x'^2 - c^2 \left(-\frac{v}{c^2} \Delta x' \right)^2 = \Delta x'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$



$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Vist des del sistema de referencia mòbil els temps son mes llargs i les distancies mes curtes.

La paradoxa dels bessons

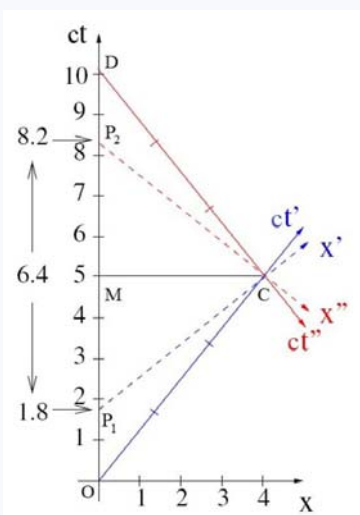


α -centaure està a 4 anys llum: $\Delta x = 4$ c i, a la velocitat $v = 0.8$ c, costa un temps $\Delta t = 5$ anys d'aplegar.

Apol·lo queda quiet en la terra mentre Diana fa el viatge.

Apol·lo calcula el temps $\Delta t'$ que ha passat per a Diana, mentre per a ell en han passat 10:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \quad \text{calcula } \Delta t' = 6$$



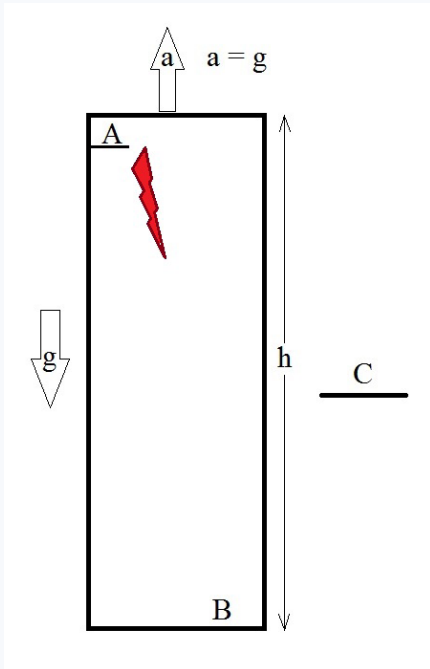
Des del punt de vista de Diana, ella està quieta i pot calcular el temps que passa per Apol·lo que ella veu en moviment:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \quad \text{calcula } \Delta t' = 3.6 \quad ??$$

El càlcul de Diana és incorrecte: ella canvia de sistema de referencia a l'anada i la tornada:

Diana pateix un canvi sobtat de simultaneïtat des del punt P_1 al punt P_2 : veu que Apol·lo de sobte envelleix.

La gravetat en acció: L'acció de la gravetat retarda els rellotges



Considerem el límit Newtonià. Únicament mantenim la constància de la velocitat c de la llum.

(vist per un observador inercial en C)

A un temps $t = 0$

A emet un pols, que B rep en un temps posterior $t = t_1$

En passar un temps $\Delta\tau_A$ A envia un segon pols que es rebut per B en un temps posterior $t = t_1 + \Delta\tau_B$.

$$z_A(0) - z_B(t_1) = c(t_1 - 0)$$

$$z_A(\Delta\tau_A) - z_B(t_1 + \Delta\tau_B) = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A)$$

És a dir:

$$h - \frac{1}{2}gt_1^2 = ct_1$$

$$\left[h + \frac{1}{2}g\Delta\tau_A^2\right] - \left[\left(\frac{1}{2}g(t_1 + \Delta\tau_B)^2\right)\right] = c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A)$$

Considerem que $\Delta\tau_A^2 \ll \Delta\tau_A$, $\Delta\tau_B^2 \ll \Delta\tau_B$

De la primera equació:

$$h - \frac{1}{2}gt_1^2 = ct_1 \longrightarrow t_1^2 + \frac{2c}{g}t_1 + \frac{2h}{g} = 0$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$t_1 = -\frac{c}{g} + \frac{c}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}} \approx \frac{h}{c}$$

De la segon (fins a termes lineal en $\Delta\tau$):

$$\left(h - \frac{1}{2}gt_1^2\right) - gt_1\Delta\tau_B = ct_1 + c(\Delta\tau_B - \Delta\tau_A)$$

$$\rightarrow -gt_1\Delta\tau_B = c(\Delta\tau_B - \Delta\tau_A)$$

$$\rightarrow \Delta\tau_A = \Delta\tau_B\left(1 + \frac{gt_1}{c}\right)$$

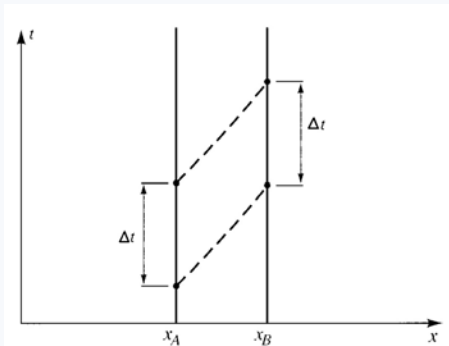
Substituint t_1 de la anterior:

$$\Delta\tau_B = \Delta\tau_A\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)^{-1} \approx \Delta\tau_A\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \longrightarrow \boxed{\Delta\tau_B = \Delta\tau_A\left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right)}$$

La constància de la velocitat c de la llum fa que els rellotges no vagin igual de ràpids:

Qui té major gravetat té el rellotge mes lent.

La gravetat en termes de canvis de mètrica de l'espai-temps



Considerem el següent model de mètrica de l'espai-temps

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\phi(\hat{r})}{c^2} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\phi(\hat{r})}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Com el potencial no depèn del temps, les world línies seran paral·leles.

A i B estan tots dos en repòs:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\phi_A}{c^2} \right) (cdt)^2 \rightarrow d\tau_A^2 = - \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 + \frac{2\phi_A}{c^2} \right) dt^2$$

$$\longrightarrow d\tau_A = \left(1 + \frac{\phi_A}{c^2} \right) dt \quad \text{anàlogament} \quad d\tau_B = \left(1 + \frac{\phi_B}{c^2} \right) dt$$

$$d\tau_A \left(1 + \frac{\phi_B}{c^2} \right) = d\tau_B \left(1 + \frac{\phi_A}{c^2} \right) \rightarrow d\tau_B = \left(1 + \frac{\phi_B}{c^2} \right) \left(1 + \frac{\phi_A}{c^2} \right)^{-1} d\tau_A \approx \left(1 + \frac{\phi_B}{c^2} \right) \left(1 - \frac{\phi_A}{c^2} \right) d\tau_A$$

$$\rightarrow d\tau_B = \left(1 + \frac{\phi_B - \phi_A}{c^2} - \frac{\phi_A \phi_B}{c^4} \right) d\tau_A \approx \left(1 + \frac{\phi_B - \phi_A}{c^2} \right) d\tau_A$$

$$d\tau_B = \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right) d\tau_A$$

Mateix resultat que adès.

Equació d'Einstein

Relaciona la curvatura amb la densitat de massa-energia.

És una equació fonamental de la física,

per tant no pot ser deduïda de ninguna física més fonamental...

però pot ser motivada a partir d'arguments raonables.

Representa l'equivalent relativista de l'equació de Poisson: $\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho$

En teoria relativista hi ha equivalència entre massa i energia, $E = mc^2$.

Tanmateix, l'energia està relacionada amb el moment, $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$

Massa, energia i moment estan doncs relacionats.

És raonable assumir que la font de la gravitació en relativitat inclou massa, energia i moment.

En mecànica newtoniana la gravitació deriva de la massa, que es un escalar. l'equivalent relativista de la massa, que és la font de la gravitació en relativitat, serà una magnitud escalar o no?

El núvol de pols

En un sistema hi ha dN partícules en repòs ocupant un volum $dV = dx dy dz$

*La densitat del núvol de pols és: $\rho_0 = m_0 n_0$
(m_0 és la massa de la partícula i n_0 el nombre de partícules per unitat de volum)*

Des d'un altre sistema S , que es mou en la direcció x amb una velocitat v , la massa es veu més gran, $m = m_0 \gamma$, i la longitud al llarg de l'eix x més petita $\Delta x' = \Delta x / \gamma$. Les distàncies en y i z no es veuen afectades.

(en el sistema de referència unit al sistema els temps són més llargs i les distàncies més curtes)

$$\Delta V' = \frac{\Delta V}{\gamma}$$

$$n' = \frac{N}{\Delta V'} = \frac{N}{\Delta V} \gamma = n_0 \gamma$$

$$\rho = m n' = m_0 \gamma n_0 \gamma = \rho_0 \gamma^2. \quad \text{La densitat es transforma com un tensor}$$

four-velocity és $U = \gamma (c, v_x, v_y, v_z)$

$$\gamma^2 = \frac{1}{c^2} U^t U^t = \frac{1}{c^2} T^{tt}$$

La component tt de T^{ij} és la densitat d'energia ρc^2

El tensor energia-moment T^{ij} serà l'equivalent relativista de la font de gravitació

En l'espai-temps de Minkowski (relativitat especial) hi ha conservació d'energia i moment. Podem expressar-ho de la següent manera:

$$\vec{\nabla}_j \cdot T^{ij} = 0$$

El tensor energia-moment és un tensor de segon ordre, simètric i de divergència zero

Una volta trobat l'equivalent relativista T^{ij} de la massa, caldrà trobar l'equivalent relativista G de l'altra banda de l'equació de Poisson ($\nabla^2 \Phi$).

Per trobar-lo ens podem recolzar en tres premisses:

- (1) caldrà que G siga com T^{ij} . (tensor de segon ordre simetric i de divergencia zero)
- (2) Hem vist que potencial gravitatori entra com un canvi en la mètrica.
 G haurà d'incloure segones derivades de la mètrica
- (3) El límit no relativista aquesta equació haurà de convertir-se en l'equació de Poisson.

Les condicions (1) i (2) les compleix el tensor d'Einstein.

L'equació que iguala el tensor energia-moment amb el tensor d'Einstein ha d'incloure el factor $8\pi G/c^4$ per a que el seu límit no relativista genere l'equació de Poisson.

$$G^{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{ij}$$

La inclusió del tensor energia moment ens proporciona la distorsió de l'espai que permet entendre e.g. perquè el planeta mercuri no té una òrbita tancada sinó que forma com una rosseta (precessió del periheli de l'òrbita).

