

Relativitat per a *beginners*

Josep Planelles

January 17, 2020

1 Miscel·lània: velocitat, moment, energia

Qualsevol línia corba contínua és localment recta, de manera que sempre podem construir un vector tangent unitari en qualsevol punt d'aquesta línia dividint el vector desplaçament infinitesimal al llarg de la línia $d\hat{s}$ pel seu mòdul. En coordenades cartesianes, $d\hat{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$, $|d\hat{s}| = \sqrt{dx^2 + dy^2} \rightarrow \hat{u} = \frac{1}{|d\hat{s}|} d\hat{s}$. Si l'espai és curvilini, el vector $d\hat{s} = (dx, dy)$ presenta un mòdul, el quadrat del qual és: $ds^2 = g_{xx}dx^2 + g_{xy}dx dy + g_{yx}dy dx + g_{yy}dy^2$, amb $g_{xy} = g_{yx}$ i el vector unitari, com abans, $\hat{u} = \frac{1}{|d\hat{s}|} d\hat{s}$.

Considerem un element $d\hat{s}$ sobre la *world line* d'una partícula, que és una geodèsica sobre l'espai-temps (que és pla -espai de Minkowski- en absència de gravetat o corbat en la seua presència). El vector desplaçament sobre la *world line*, $d\hat{s} = (cdt, dx, dy, dz)$, és tangent a l'esmentada geodèsica. En absència de gravetat, en un sistema inercial soldat a la partícula, $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, amb τ el temps propi d'aquest sistema. Aleshores, $|ds| = \sqrt{|ds^2|} = cd\tau$ i el vector unitari tangent resulta $\hat{u} = d\frac{\hat{s}}{|ds|} = \frac{1}{c} \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$. En presència de gravetat hi hauria un factor addicional $\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$, atès que $ds^2 = g_{00}c^2 d\tau^2$.

Atès que $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$ (veure Eq. 8 del cap. 1, fitxer Geometria_i_Fisica.pdf) podem escriure que $\hat{u} = \frac{\gamma}{c}(c, v_x, v_y, v_z)$, cosa que permet definir el vector velocitat de l'espai-temps (*four-velocity*) $\hat{U} = c\hat{u} = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$. Aquesta velocitat, com cal, és tangent a la *world line* i té tres components espacials que en el límit $v \ll c$, i.e. $\gamma \approx 1$, $dt \approx d\tau$ són les tres components clàssiques del vector velocitat de la mecànica Newtoniana. Podem escriure $\hat{U} = \gamma(c, v)$ i calcular el seu mòdul en absència de gravetat (i.e. amb la mètrica de Minkowski): $\hat{U} \cdot \hat{U} = \gamma^2(-c^2 + v^2) = \frac{v^2 - c^2}{c^2 - v^2} c^2 = -c^2$, que observem que és un invariant. Ho és també en presència de gravetat: $\hat{U} \cdot \hat{U} = c^2 \hat{u} \cdot \hat{u} = g_{00}c^2$.

Si multipliquem $\hat{U}$ per la massa pròpia de la partícula (aquella que té quan la partícula és vista des d'un sistema soldat a ella, és a dir, la massa en repòs) tenim la definició de moment de l'espai-temps *four moment*: $\hat{P} = m_0 \hat{U}$ amb $\hat{U} = \gamma(c, v)$, que en límit $v \ll c$, i.e. $\gamma \approx 1$ resulta $\hat{P} = (m_0 c, m_0 v) = (m_0 c, p)$, amb p el moment lineal

espacial Newtonià clàssic. Tenim doncs que

$$\hat{P} \cdot \hat{P} = m_0^2 \gamma^2 (-c^2 + v^2) = m_0^2 \frac{v^2 - c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -m_0^2 c^2. \quad (1)$$

La conservació del moment en absència de forces inimplica la conservació de cadascuna de les seues components per separat. En particular se conserva $\gamma m_0 c$ i com c és una constant, se conserva també:

$$\gamma m_0 c^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 c^2$$

Si $v \ll c$, amb la identitat $\sqrt{1 - x^2} \approx 1 + \frac{1}{2} x^2$ tenim que:

$$\gamma m_0 c^2 \approx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{c^2} \right) \right] m_0 c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

La quantitat que se conserva és doncs la suma de l'energia cinètica més un terme $m_0 c^2$. Si el sistema està en repòs $v = 0$, aquesta quantitat d'energia és l'energia en repòs $m_0 c^2$. Si la partícula està en moviment la magnitud que se conserva és l'energia $\gamma m_0 c^2 = mc^2$ amb $m = \gamma m_0$ la massa en moviment.

1.1 Relació Energia-Moment

D'acord amb l'Eq. (1) $P^2 = -m_0^2 c^2$. Si anomenem $E = m c^2 = m_0 \gamma c^2$, tenim que $\hat{P} = m_0 \gamma (c, v) = (mc, p) = (\frac{E}{c}, p)$. Per tant, $-m_0^2 c^2 = P^2 = -\frac{E^2}{c^2} + p^2 \rightarrow m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2$ que reescrivim:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (2)$$

En el cas d'un fotó, amb massa en repòs zero, $E = pc$.

1.2 Transformacions de velocitats

Recordem ací les Eqs. (6) i (7) de la secció 1.3 del capítol 1 (fitxer Geometria_i_Fisica.pdf):

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

De les dues primeres tenim:

$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{V_x - v}{1 - \frac{v V_x}{c^2}}$$

De la primera i la tercera:

$$\frac{dy'}{dt'} = v'_y = \frac{dy}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{V_y}{1 - \frac{v V_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Anàlogament per a la coordenada z . De les dues equacions anteriors trobem que si $V_x = c$:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{c - v}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c(c - v)}{c - v} = c \\ v'_y &= \frac{V_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

1.3 Vector tangent a la *world line* i equació de la geodèsica

Considerem en primer lloc un sistema inercial (absència de gravetat, mètrica de Minkowski):

$ds^2 = -c^2 dt + dx^2 = -c^2 d\tau^2 \rightarrow d\tau^2 = dt = 2 + \frac{1}{c^2} dx^2$. Per tant,

$$\tau = \int_A^B dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3)$$

La condició de temps propi extremal (principi variacional o de mínima acció) equival a les equacions de Lagrange per a la Lagrangiana definida, en aquest cas, per $L(x, v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Com $L(x, v)$ és ara únicament $L(v)$, aleshores $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$. Tanmateix, de l'Eq. (3) tenim que $L = \frac{d\tau}{dt}$. Per tant, l'equació de Lagrange queda simplement:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = -\frac{d}{dt} \frac{v}{L} = -\frac{d}{dt} \frac{dt}{d\tau} \frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{dx}{d\tau} = -\frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} = -L \frac{d^2 x}{d\tau^2} = 0$$

D'on deduïm l'equació de la geodèsica:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = 0. \quad (4)$$

Troblem doncs que el vector tangent té components $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$ que són constants, en altres paraules, les components $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$ de la velocitat de l'espai-temps (*four-velocity*) són constants, com correspon a un moviment lliure.

En el cas no inercial, i.e., en presència de gravetat, $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j = g_{00} d\tau^2$. En aquest cas,

$$\tau = \int_A^B dt \sqrt{\sum_{ij} \frac{g_{ij}}{g_{00}} v_i v_j} \quad (5)$$

Ara la Lagrangiana $L = \frac{d\tau}{dt}$ és: $\sqrt{\sum_{ij} \frac{g_{ij}}{g_{00}} v_i v_j}$. Com la mètrica és funció de les coordenades, aleshores $\frac{\partial L}{\partial x} \neq 0$. Seguint uns passos anàlegs a la deducció anterior trobem l'equació general de la geodèsica en un espai-temps corbat per la presència de masses. Ometem els detalls de la derivació que podeu trobar en wikipèdia[5] (en la subsecció *Deriving the geodesic equation via an action*). El resultat és:

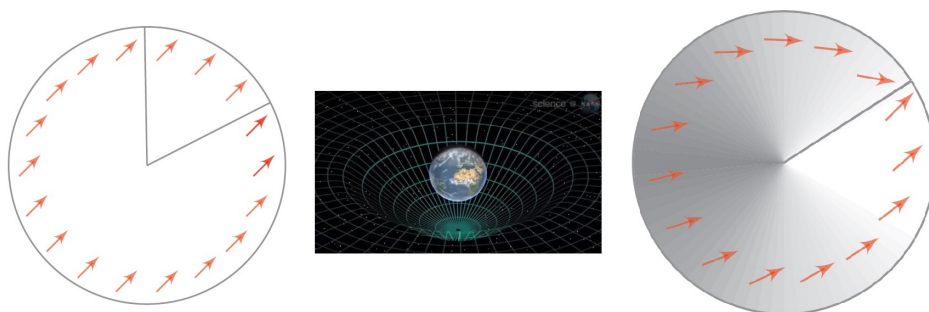
$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (6)$$

amb $\Gamma_{\alpha\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\nu})$ i $g^{ij} g_{jk} = g_{kj} g^{ji} = \delta_k^i$.

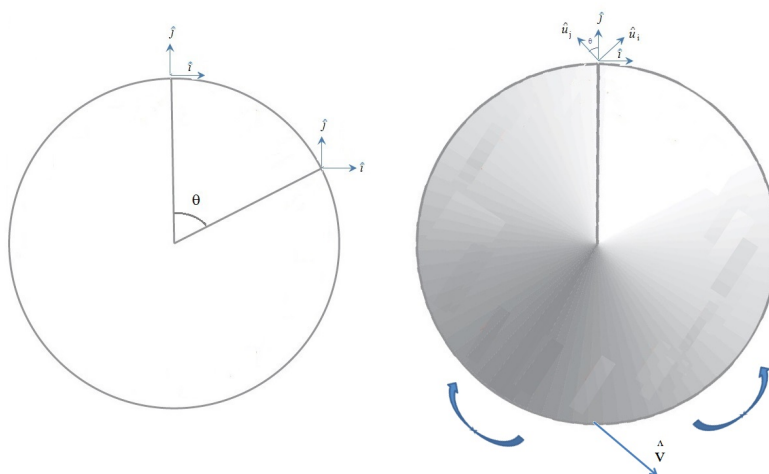
Ara les components $\frac{dx^\alpha}{d\tau}$ de la velocitat de l'espai-temps (*four-velocity*) no són constants sinó que la partícula pot experimentar una acceleració, com correspon a un potencial gravitatori que té un gradient no nul.

2 Miscel·lània: Tensor de curvatura de Riemann

La derivada covariant d'un vector ens indica la variació d'aquest al llarg d'un transport infinitesimal. Per extensió, permet calcular aquesta variació entre dos punts distants. En un espai pla aquesta variació únicament és funció del punt inicial i final, però en un espai curvilini és funció del camí triat per aplegar al punt final. I aquesta dependència caracteritza la curvatura. En la part esquerra de la figura mostrem un transport paral·lel d'un vector al llarg d'un cercle: partim del nord del cercle i movem paral·lelament el vector al llarg del perímetre d'aquest cercle. En tornar el vector al punt inicial és indistingible del vector de partida.



En la mateixa figura hi ha marcades dues línies per on efectuem un tall i identifiquem els extrems tallats per formar una superfície cònica (figura de la dreta). En doblar el paper per fer la identificació del costat tallat superior sobre l'inferior *afectem* la direcció del vector, de manera que el vector després de traslladar-se per la base del conus i tornar al punt inicial, forma un angle amb el vector original. L'existència d'aquest angle prova la curvatura del conus.



En aquesta altra figura mostrem com canvia el conjunt dos vectors que inicialment (part esquerra) són paral·lels i amb la identificació dels costats tallats, deixen de ser-ho (part dreta de la figura). Tanmateix hi ha pintat un vector al pol sud que traslladarem al pol nord seguin el camí de la dreta i el de l'esquerra. En un espai pla únicament importa el punt de partida i el d'arribada, mentre que en un espai curvilini, el camí és important

i, segons el camí triat, podem obtenir un resultat diferent. En particular, pot ser diferent encara que el camí siga infinitesimal. Imaginem un petit paral·lelogram de costats dq_i , dq_j , imaginem que definim dos possibles camins: primer una variació infinitesimal dq_i de la variable q_i , seguida d'una variació dq_j o vice-versa. Aleshores estudiem la variació que experimenta un vector $\hat{V}(q_1, \dots, q_n)$. Si l'espai és pla i les coordenades cartesianes, la condició de Schwarz de derivades creuades ens permet concloure que $\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial x_j \partial x_i} = 0$. En un espai curvilini la cosa pot canviar.[6, 7]

En efecte, en la secció 1.3 de la Introducció (fitxer IntroductionTR.pdf) vam veure que en coordenades curvilínies la derivada d'un vector afecta tant les coordenades com la base de vectors en termes del qual s'expressa:

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial q_j} \hat{u}_i + V_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial q_j} \quad (7)$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial q_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial q_j \partial q_k} &= \sum_i \left\{ \left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial q_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial q_j \partial q_k} \right) \hat{u}_i + V_i \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial q_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial q_j \partial q_k} \right) \right\} \\ &= \sum_i V_i \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial q_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial q_j \partial q_k} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

on hem emprat la condició de Schwarz de derivades segones per eliminar el primer parèntesi.

En la secció 1.3 de la Introducció, eq. (9), expressàvem la derivada del vector de la base en termes de la pròpia base: $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial q_j} = \sum_l \Gamma_{ij}^l \hat{u}_l$. Tornant a derivar trobem:¹

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial q_k \partial q_j} &= \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial q_k} \hat{u}_l + \Gamma_{ij}^l \sum_r \Gamma_{lk}^r \hat{u}_r \right) \\ &= \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial q_k} + \sum_r \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^l \right) \hat{u}_l \end{aligned} \quad (9)$$

Anàlogament,

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial q_j \partial q_k} = \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial q_j} + \sum_r \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rj}^l \right) \hat{u}_l \quad (10)$$

Finalment,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_j}, \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k} \right] \hat{u}_i = \sum_l \left\{ \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial q_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial q_j} \right) + \sum_r (\Gamma_{ij}^r \Gamma_{kr}^l - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l) \right\} \hat{u}_l \quad (11)$$

on hem tingut en compte la simetria $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

¹Fem servir la identitat: $\sum_l \Gamma_{ij}^l \sum_r \Gamma_{lk}^r \hat{u}_r = \sum_l \left(\sum_r \Gamma_{ij}^r \Gamma_{rk}^l \right) \hat{u}_l$, que és immediata si ens adonem que els índexs són muts.

A la magnitud entre claus en la darrera equació se l'anomena *tensor de curvatura de Riemann*, que amb el criteri de suma sobre índex repetits, sol ser escrit en la forma:

$$R_{ikj}^l = \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial q_k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial q_j} + \Gamma_{ij}^r \Gamma_{kr}^l - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l \quad (12)$$

Amb la qual cosa,

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial q_k \partial q_j} - \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial q_j \partial q_k} = \sum_{il} V_i R_{ikj}^l \hat{u}_l \quad (13)$$

El tensor de curvatura mesura la no commutativitat de la derivada covariant. Està definit en termes del símbol de Christoffel i les seues primeres derivades. Per la seua banda el símbol de Christoffel pot ser escrit en termes de les derivades primeres de la mètrica (veure e.g [1] Cap 2.10). En conseqüència, el tensor de curvatura no pot ser nul en espais amb curvatura, perquè no podem trobar un sistema de referència en el que les segones derivades de la seua mètrica siguin zero.

2.1 Altres tensors de curvatura com traces del Tensor de curvatura de Riemann

A partir d'un tensor, podem obtenir tensors d'ordre inferior calculant la seua traça. Per exemple, en el cas del tensor d'inèrcia, que es un tensor d'ordre dos amb elements diagonals $I_{xx} = \int_V \rho(r^2 - x^2)dv$, $I_{yy} = \int_V \rho(r^2 - y^2)dv$, $I_{zz} = \int_V \rho(r^2 - z^2)dv$, podem calcular la seua traça $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2 \int_V \rho r^2 dv = 2 I_O$, que és el doble de l'escalar moment d'inèrcia polar.² Anàlogament, la traça del tensor de polaritzabilitat és un escalar que s'anomena polaritzabilitat isotròpica, que existeix sempre en els àtoms o molècules, mentre que les altres components del tensor són les que donen la resposta anisotròpica i que se fan zero per a densitats de càrrega amb simetria esfèrica. Doncs be, de manera semblant, a partir del tensor de curvatura de Riemann podem calcular tensors d'ordre inferior. Trobem en primer lloc el Tensor de Ricci $R_{ik} = R_{ikj}^j$ amb suma sobre l'índex repetit (j). Ometem els detalls de comprovar que aquest tensor és simètric, $R_{ik} = R_{ki}$ i que la seua derivada covariant és $\frac{\partial R_{ik}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_i} (g_{ik} R)$, on R és l'anomenada curvatura escalar, que és la traça del tensor de Ricci. A partir d'aquest resultat podem definir el tensor de curvatura d'Einstein $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R$ que és simètric i té, a més, derivada covariant nul·la.

References

- [1] George B. Arfken, Mathematical Methods for Physicists Elsevier 2005
- [2] <http://www3.uji.es/~planelle/APUNTS/SOLID/kp/EulerLagrange.pdf>
- [3] Kip S. Thorne, Black Holes and Time Warps, W.W. Norton and Company 1994
- [4] James B. Haultre, Gravity: an introduction to Einstein's General Relativity, Addison-Wesley 2003

²El moment d'inèrcia polar és una quantitat utilitzada per predir habilitat per resistir la torsió d'un objecte i no s'ha de confondre amb el moment d'inèrcia, que relaciona el moment angular amb la velocitat angular.

- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Geodesics_in_general_relativity
- [6] Schutz, Bernard F., A first course in general relativity, Capítol 6.5, Cambridge University Press (2009)
- [7] <https://www.einsteinrelativelyeasy.com/index.php/general-relativity/61-the-riemann-curvature-tensor>