

# Relativitat per a *beginners*

Josep Planelles

January 17, 2020

## 1 Introducció

Aquestes són unes notes de primer contacte amb la teoria de la relativitat amb èmfasi en els fonaments bàsics i la seua íntima relació amb la mecànica newtoniana, fent ús d'una formalització matemàtica simple.

Abans de començar és útil revisar alguns conceptes generals que enumerem tot seguit amb els *links* o referències que permeten fer-lis una ullada més detallada. Tanmateix, es pot saltar aquesta secció introductòria i tornar sobre ella si se veu que fa falta en llegir les seccions posteriors. Ens referim a:

### 1.1 Producte escalar de dos vectors expressats en una base $\{\hat{e}_i\}$ no ortonormal

Per exemple,  $\hat{v}_a = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$  amb  $\hat{v}_b = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3$  on  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = g_{ij} \neq \delta_{ij}$ .

Tenim,  $\hat{v}_a \cdot \hat{v}_b = \sum_{ij} a_i b_j g_{ij}$ .

També,  $\hat{v}_a \cdot \hat{v}_a = \sum_{ij} a_i a_j g_{ij}$

### 1.2 Coordenades curvilínies

Partim de coordenes cartesianes  $x, y, z$ , que re-etiquetem  $x_1, x_2, x_3$ , i considerem unes altres coordenades  $q_1, q_2, q_3$ , on  $q_i(x, y, z)$ .

Considerem un vector infinitesimal  $d\hat{r} = dx_1 \hat{i}_1 + dx_2 \hat{i}_2 + dx_3 \hat{i}_3$ , on  $\hat{i}_i = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ . Atès que  $dx_i = \sum_j \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) dq_j$  podem escriure:

$$d\hat{r} = \sum_k \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \right) \hat{i}_1 dq_1 + \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \right) \hat{i}_2 dq_2 + \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_3} \right) \hat{i}_3 dq_3 = \sum_{kj} \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \hat{i}_k dq_j \quad (1)$$

de manera que, tenint en compte que  $\hat{i}_k \cdot \hat{i}_l = \delta_{kl}$ :

$$ds^2 = d\hat{r} \cdot d\hat{r} = \sum_{kj} \sum_{ls} \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \left( \frac{\partial x_l}{\partial q_s} \right) \hat{i}_k \cdot \hat{i}_l dq_j dq_s = \sum_{js} \left( \sum_k \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \right) \right) dq_j dq_s = \sum_{js} g_{js} dq_j dq_s \quad (2)$$

$g_{js}$  s'anomena mètrica. La mètrica deriva de la curvatura de l'espai, però també de les coordenades triades. Per exemple,  $R^2$  és un espai pla. La mètrica cartesiana d'aquest espai és<sup>1</sup>  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Però la mètrica polar ( $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ) és diferent:

$$g_{rr} = \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (3)$$

$$(4)$$

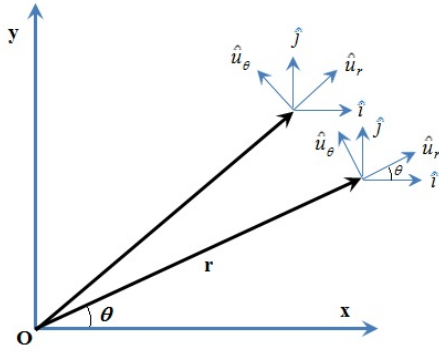
$$g_{\theta\theta} = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = \left( \frac{\partial x}{\partial \cos \theta} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \right)^2 = r^2 \quad (5)$$

$$(6)$$

$$g_{r\theta} = g_{\theta r} = \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = \cos \theta [r(-\sin \theta)] + \sin \theta [r \cos \theta] = 0 \quad (7)$$

aquest resultat per a la mètrica polar està d'acord amb el fet que:  $d\hat{r} = dr\hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta$ , amb  $\hat{u}_r \cdot \hat{u}_\theta = 0$ . Per tant,  $ds^2 = d\hat{r} \cdot d\hat{r} = dr^2 + r^2 d\theta^2$ , tal com he obtingut adés. Per a més detalls sobre aquest tema veure e.g. el capítol 2 de Arfken[1]

### 1.3 Vectors unitaris en coordenades curvilínies. Derivada d'un vector



Els vectors unitaris cartesianes són els mateixos en qualsevol punt de l'espai. Açò no és cert, en general, per a altres coordenades. En la figura mostrem  $R^2$  descrit per dos conjunts de coordenades: cartesianes i polars. De la figura observem que els vectors unitaris cartesianes  $\hat{i}, \hat{j}$  són idèntics en els dos punts, però no els polars. En la figura observem que  $\hat{u}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \rightarrow \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = \hat{u}_\theta$  i que  $\hat{u}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \rightarrow \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{u}_r$ . També,  $\frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r} = \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial r} = 0$ .

Per tant, els vectors unitaris en punts diferents són clarament diferents. Per aquest motiu, mentre que la derivada en cartesianes d'un camp vectorial  $\hat{V}(x, y) = V_x(x, y) \hat{i} + V_y(x, y) \hat{j}$  és simplement  $\frac{\partial \hat{V}(x, y)}{\partial x_i} = \frac{\partial V_x}{\partial x_i} \hat{i} + \frac{\partial V_y}{\partial x_i} \hat{j}$ , si escrivim aquest mateix camp en coordenades polars,  $\hat{V}(r, \theta) = V_r(r, \theta) \hat{u}_r + V_\theta(r, \theta) \hat{u}_\theta$ , aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}}{\partial r} &= \frac{\partial V_r}{\partial r} \hat{u}_r + V_r \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \hat{u}_\theta + V_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial V_r}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \hat{u}_\theta \\ \frac{\partial \hat{V}}{\partial \theta} &= \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \hat{u}_r + V_r \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \hat{u}_\theta + V_\theta \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \hat{u}_r + V_r \hat{u}_\theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \hat{u}_\theta - V_\theta \hat{u}_r \\ &= \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - V_\theta \right) \hat{u}_r + \left( V_r + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \hat{u}_\theta \end{aligned} \quad (8)$$

Sempre podem expressar la derivada d'un vector unitari en termes de la pròpia base de vectors unitaris:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial q_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \hat{u}_k \quad (9)$$

<sup>1</sup>Adonem-nos que  $\sum_k \left( \frac{\partial x_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \right) = \sum_k \delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ij}$ .

El coeficient  $\Gamma_{ij}^k$  de l'expansió s'anomena símbol de Christoffel. Aquest símbol és simètric:  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

En resum, quan un vector s'expressa en coordenades no cartesianes, la seua "correcta" derivada (anomenada derivada *covariant*) és:

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial q_j} = \sum_i \left( \frac{\partial V_i}{\partial q_j} \hat{u}_i + \sum_k V_i \Gamma_{ij}^k \hat{u}_k \right) = \sum_i \left( \frac{\partial V_i}{\partial q_j} + \sum_k V_k \Gamma_{kj}^i \right) \hat{u}_i \quad (10)$$

Per a més detalls sobre aquest tema veure e.g. el capítol 2 de Arfken.[1]

## 1.4 El ball amunt i avall dels índexs dels tensors

A primera vista sembla confús que de vegades els tensors tinguen els índexs dalt ( $T^{ij}$ ) o baix ( $T_{ij}$ ) o dalt i baix ( $T_j^i$ ) i que el càlcul de la traça de vegades incloga el producte amb la mètrica i de vegades no. Anem a ficar un poc d'ordre.

Un vector  $\hat{V}$  el podem representar com una matriu columna de coordenades o components  $x^i$  amb  $i = 1, 2, \dots, N$ , on  $N$  és la dimensió del vector. Si aquest vector està expressat en una base no ortogonal, aleshores el producte escalar amb un altre vector  $\hat{W}$  de components  $y^j$  resulta:

$$\hat{W} \cdot \hat{V} = \sum_{ij} y^j x^i \hat{u}_j \cdot \hat{u}_i = \sum_{ij} y^j g_{ji} x^i \quad (11)$$

Per tant, donat un vector  $\hat{V}$ , que de vegades se representa per  $|V\rangle$ , podem definir el seu dual  $\langle V|$  com aquella matriu fila de components  $x_i$ , la qual resulta del producte:<sup>2</sup>

$$\langle V| = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1N} \\ & \dots & \\ g_{N1} & \dots & g_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \quad (12)$$

De manera que la norma és:

$$\langle V|V \rangle = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1N} \\ & \dots & \\ g_{N1} & \dots & g_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^N \end{pmatrix} = \sum_{ij} x^i x^j g_{ij} \quad (13)$$

---

<sup>2</sup>En coordenades cartesianes, on la mètrica és la unitat, les coordenades de  $\langle V|$ , anomenades coordenades covariants de  $\hat{V}$ , i les de  $|V\rangle$ , anomenades coordenades contravariants de  $\hat{V}$ , són idèntiques. En general no ho són.

i el producte escalar de  $|V\rangle$  i  $|W\rangle$ :

$$\langle W|V\rangle = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 & y^2 & \dots & y^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1N} \\ & \dots & \\ g_{N1} & \dots & g_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^N \end{pmatrix} = \sum_{ij} y^i x^j g_{ij} \quad (14)$$

A  $|V\rangle$  se l'anomena vector contravariant i a  $\langle V|$  covariant. El pas entre coordenades covariants i contravariants és doncs:

$$x_i = x^j g_{ji} \quad (15)$$

Si usem la notació  $g^{ij}$  per a la inversa de la mètrica, de manera que amb el criteri de sumar índex repetits,<sup>3</sup>

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (16)$$

aleshores, des de l'Eq. (15),

$$x_i = x^j g_{ji} \rightarrow x_i g^{ik} = x^j g_{ji} g^{ik} = x^j \delta_j^k = x^k$$

és a dir,

$$x^i = x_j g^{ji}. \quad (17)$$

Ara considerem Tensors. Podem imaginar un Tensor com aquella magnitud que pot construir-se a partir de les coordenades de dos vectors. Aleshores,  $T_{ij} = x_i y_j$  és un tensor covariant,  $T^{ij} = x^i y^j$  un tensor contravariant i  $T_j^i = x^i y_j$  un tensor mixt.

La traça  $T$  del tensor mixt és  $T = T_i^i = x^i y_i \equiv y^j g_{ji} x^i$ . Per això la traça de  $T_{ij}$  ja **no** és simplement la suma dels elements diagonals, atès que cal calcular be el producte escalar. En aquest cas la traça s'ha de calcular incloent-hi la mètrica:

$$T = x^i y_i = x_j g^{ij} y_i = g^{ij} T_{ij}$$

i.e.,  $T = g^{ij} T_{ij}$ . Anàlogament, la traça  $T$  de  $T^{ij}$  és  $T = x^i y_i = x^i y^j g_{ji} = g_{ji} T^{ij}$ .

## 2 Revisió d'alguns tòpics de Mecànica clàssica no relativista

### 2.1 Principi de mínima acció. Equacions d'Euler-Lagrange

També conegut com principi variacional de la mecànica, encara que és més general (vegeu [2]).

Restringint-nos a la mecànica Newtoniana, definim la Lagrangiana  $L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ . Aleshores, l'equació de Lagrange,  $-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ , equival a la llei de Newton. En efecte, per una banda  $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F$ . Per una altra banda  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow -\frac{d}{dt}m\dot{x} = m\ddot{x}$ . Am la qual cosa hem retrobat  $F = m\ddot{x}$ .

---

<sup>3</sup>Atenció: de vegades la inversa de la mètrica se representa *transposta*, i.e., es defineix de manera que  $g_{ij} g^{kj} = \delta_i^k$ .

Fixats un temps inicial  $t_A$  i un temps final  $t_B$ , definim acció:  $S[x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} L(\dot{x}, x) dt$ . Doncs be, entre tots el possibles camins que connecten  $x_A$  en  $t_A$  amb  $x_B$  en  $t_B$ , aquell que deriva de l'equació de Lagrange, és a dir, el que segueix el sistema físic, correspon a l'extremal de l'acció  $\delta S = 0$ :

$$\delta S = 0 = \int_{t_A}^{t_B} \delta L(\dot{x}, x) dt \rightarrow -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

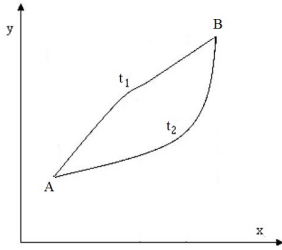
La demostració implica una integració per parts. Podeu trobar el detall en el link anterior. [2]

## 2.2 Equació de Poisson

Relaciona el potencial amb les fonts que l'origenen. En electrostàtica on la força és  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}$  i el potencial és  $\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$  o  $\Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dv \frac{\rho}{r}$  per a una densitat  $\rho(\hat{r})$  de càrrega distribuïda en el volum  $V$ , l'equació de Poisson és  $\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ . En gravitació, on la força és  $F = G \frac{Mm}{r^2}$  i el potencial  $\Phi = -G \frac{M}{r}$  o  $\Phi = -G \int_V dv \frac{\rho}{r}$ , aquesta equació resulta ser  $\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho$ .

## 2.3 Trajectòria geodèsica en absència de forces

### 2.3.1 Espai Euclidià. Distància més curta entre dos punts



Considerem dos punts  $A$  i  $B$  i volem determinar la distància  $S_{AB}$  mínima entre ells. L'element diferencial de distància  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ . Per tant,  $S_{AB} = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}$ .

El camí  $y(x)$  en el pla  $xy$  el podem associar amb un paràmetre  $t$  entre un valor  $t = 0$  en  $(x_A, y_A)$  i un valor  $t = 1$  en  $(x_B, y_B)$  definint  $x(t)$  i  $y(t)$  convenientment. En funció de les relacions  $x(t)$ ,  $y(t)$  trobarem un o altre camí entre  $A$  i  $B$ . El camí més curt és un extremal entre tots els camins possibles. Per tant, es correspon amb  $\delta S = 0$ . Escrivim:

$$\delta S = 0 = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad (19)$$

Identificant  $L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ , aquesta equació d'extrem equival a l'equació de Lagrange  $-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ , amb  $x_i = x, y$ . En aquest cas particular com  $L$  no és funció de  $x$  ni de  $y$ , resulta  $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ . Aleshores,

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{L} = C_1 \quad (20)$$

Anàlogament,  $\frac{\dot{y}}{L} = C_2$ . Per tant,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{C_2}{C_1} = C \rightarrow \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx} = C \rightarrow y = Cx + C' \quad (21)$$

que és l'equació d'una recta: la distància més curta entre dos punts en el plànol Euclidià és doncs la de la recta que els uneix.

### 2.3.2 Espai Euclidià. Trajectòria en absència de forces

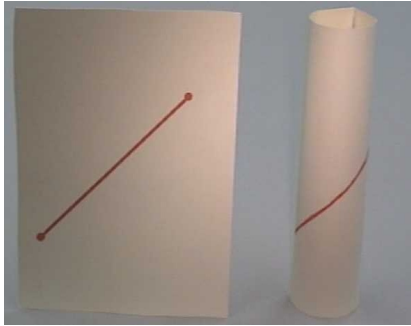
En absència de forces el potencial és constant, que podem assumir zero amb una apropiada tria de l'origen d'energies. Aleshores la Lagrangiana és simplement l'energia cinètica:  $L = T(\dot{x}, \dot{y})$ . El principi de mínima acció o, equivalentment, les equacions de Lagrange resulten en aquest cas:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = C_1 \quad (22)$$

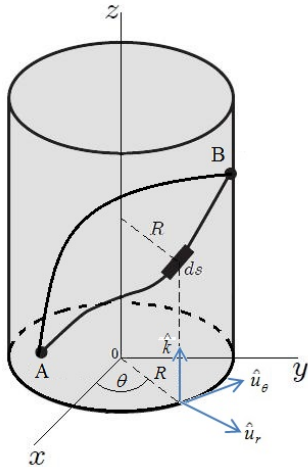
$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = C_2 \quad (23)$$

Dividint una equació per l'altra deduïm que  $\frac{dy}{dx} = \frac{C_2}{C_1} = C \rightarrow y = Cx + C'$  que indica que la trajectòria en absència de forces és la línia recta que uneix A i B, és a dir, el camí més curt.

### 2.3.3 Espai Curvilini. Distància més curta entre dos punts



Considerem un rectangle en el qual identifiquem els costats oposats i el convertim en una superfície cilíndrica. Una línia recta en el rectangle passa a ser una línia sobre la superfície cilíndrica. La distància entre els dos punts A i B dibuixats és la mateixa independentment que doblem el paper pla i el fem un cilindre.



L'element  $d\hat{r}$  sobre aquesta superfície cilíndrica té nul·la la component en  $\hat{u}_r$ , per tant,  $d\hat{r} = dz\hat{k} + R d\phi \hat{u}_\phi \rightarrow ds^2 = d\hat{r} \cdot d\hat{r} = dz^2 + R^2 d\phi^2$ . La distància entre A i B serà doncs:

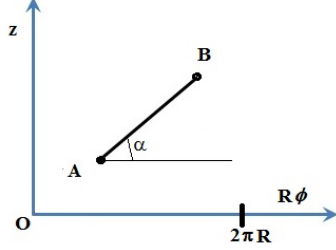
$$S_{AB} = \int_A^B \sqrt{dz^2 + R^2 d\phi^2} dt = \int_0^1 \sqrt{\dot{z}^2 + R^2 \dot{\phi}^2} dt \quad (24)$$

En identificar  $L = \sqrt{\dot{z}^2 + R^2 \dot{\phi}^2}$ , la condició d'extrem és:  $-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ , amb  $x_i = z, \phi$ .

Com  $L$  no és funció de  $z$  ni de  $\phi$ , tenim que  $\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ , amb la qual cosa:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\dot{z}}{L} = C_1 \quad (25)$$

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{R^2 \dot{\phi}}{L} = C_2 \quad (26)$$



Dividint les dues equacions obtenim  $\frac{\dot{z}}{R^2 \dot{\phi}} = \frac{C_1}{C_2} = C$   
 $\rightarrow dz = C R^2 d\phi \rightarrow z = k + CR(R\phi)$  que és l'equació d'una recta de pendent  $CR$  en el plànol  $(z, R\phi)$ .

En identificar 0 amb  $2\pi R$  doblem el rectangle i fem una superfície curvilínia (cilíndrica) on la recta anterior (que és la distància més curta entre  $A$  i  $B$ ) es converteix en una geodèsica (línia que uneix  $A$  i  $B$  pel camí més curt sobre l'espai curvilini). Com hem dit més amunt, la longitud que hi ha entre  $A$  i  $B$  no ha canviat pel fet de doblar el paper rectangular i convertir-lo en superfície cilíndrica.

#### 2.3.4 Espai Curvilini. Trajectòria en absència de forces

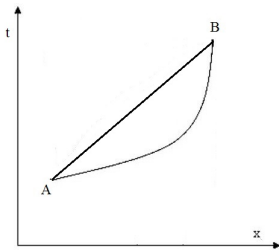
Com havíem dit abans, si no hi ha forces podem assumir que el potencial és zero, de manera que la Lagrangiana és simplement l'energia cinètica:  $L = T(\dot{z}, \dot{\phi})$ . Com  $d\hat{r} = dz \hat{k} + R d\phi \hat{u}_\phi$ , aleshores  $\hat{v} = \dot{z} \hat{k} + R \dot{\phi} \hat{u}_\phi$  i, per tant,  $T = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + R^2 \dot{\phi}^2)$ . De nou,  $L$  no es funció de  $z$  i  $\phi$  i per tant  $\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ , de manera que:

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = C_1 \quad (27)$$

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mR^2 \dot{\phi} = C_2 \quad (28)$$

Dividint una equació per l'altra trobem  $\frac{dz}{d\phi} = R^2 \frac{C_1}{C_2}$  que és l'equació de la mateixa geodèsica que hem trobat en la subsecció anterior.

#### 2.3.5 Relació d'extrem en $S_{AB}$ vs. mínima acció: absència de forces



En el sistema d'eixos  $(t, x)$  la distància entre els punts  $A$  i  $B$  la calculem integrant l'element de longitud  $ds^2 = dt^2 + dx^2$ :  $S_{AB} = \int_A^B \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$ . La condició d'extrem  $\delta S = 0$ , amb la identificació  $L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ , equival a resoldre l'equació d'Euler-Lagrange  $-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ .

Com  $L(\dot{x})$ , aleshores  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  i  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} = C \rightarrow \frac{\dot{x}^2}{1+\dot{x}^2} = C^2 \rightarrow \dot{x}^2 = \frac{C^2}{1-C^2} \rightarrow \dot{x} = k \rightarrow dx = kdt \rightarrow x = x_0 + k(t - t_0)$  (moviment rectilini uniform).

Des del punt de vista mecànic, en absència de forces la Lagrangiana és simplement energia cinètica  $L = T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ . La corresponent acció:  $S = \int_A^B Ldt = \int_A^B \frac{1}{2}m\dot{x}^2 dt$ . La condició d'extrem comporta  $-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ , que, com adés,  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$  i, per tant,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = C$ . Velocitat constant i.e. moviment rectilini uniform, que és el mateix resultat obtingut abans.

Podem trobar una relació directa entre els dos principis variacionals que donen lloc al mateix resultat físic si considerem que<sup>4</sup>  $\sqrt{1+\dot{x}^2} \approx 1 + \frac{\dot{x}^2}{2}$ . És a dir,  $\frac{ds}{dt} \approx 1 + \frac{L}{m}$ , que permet escriure:

$$S_{AB} = \int_A^B dt \frac{ds}{dt} = \int_A^B dt \left(1 + \frac{L}{m}\right) = t_B - t_A + \frac{1}{m} \int_A^B Ldt \quad (29)$$

de manera que veiem que si l'acció té un extrem, també la distància en l'espai-temps el té (el moviment rectilini uniform és una recta en el sistema  $(t, x)$ ).

### 2.3.6 Relació d'extrem en $S_{AB}$ vs. mínima acció: presència de forces

En presència de potencial  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - m\Phi(x)$  i l'equació de Lagrange,  $-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ , amb  $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$  i  $\frac{\partial L}{\partial x} = -m\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F$ , resulta  $F = m\ddot{x}$ . El moviment ja no és rectilini uniform.

Per una altra banda, si canviem la mètrica del sistema  $(t, x)$  i escrivim  $ds^2 = (1 - 2\Phi)dt^2 + dx^2$  en lloc d'usar la mètrica cartesiana  $ds^2 = dt^2 + dx^2$ , la distància  $A - B$  resulta:  $S_{AB} = \int_A^B \sqrt{(1 - 2\Phi) + \dot{x}^2} dt$ .

Si escrivim  $\sqrt{(1 - 2\Phi) + \dot{x}^2} = \sqrt{1 + (\dot{x}^2 - 2\Phi)} \approx 1 + \frac{\dot{x}^2}{2} - \Phi = 1 + \frac{L}{m}$  tenim que:

$$S_{AB} = \int_A^B \left(1 + \frac{L}{m}\right) dt = \int_A^B dt + \frac{1}{m} \int_A^B Ldt = t_B - t_A + \frac{1}{m} \int_A^B Ldt \quad (30)$$

i.e., la condició d'extrem en la distància  $\delta S_{AB} = 0$  equival a la mínima acció  $\delta \int_A^B Ldt = 0$ . En altres paraules, la modificació en la trajectòria rectilínia que introdueix el potencial equival a un canvi de mètrica en el sistema espai-temps. És a dir, introduir un potencial és equivalent a no afegir-lo però introduir, en el seu lloc, una curvatura en l'espai-temps. *En altres paraules, el problema del moviment en presència de potencial equival al moviment lliure (geodèsiques) en un espai-temps curvilini.*

## References

- [1] George B. Arfken, Mathematical Methods for Physicists Elsevier 2005
- [2] <http://www3.uji.es/~planelle/APUNTS/SOLID/kp/EulerLagrange.pdf>

---

<sup>4</sup>Sempre podem trobar unes unitats que facin que  $\dot{x} \ll 1$  -e.g. comprimint l'eix  $x$ .

[3] James B. Haulte, Gravity: an introduction to Einstein's General Relativity, Addison-Wesley 2003