

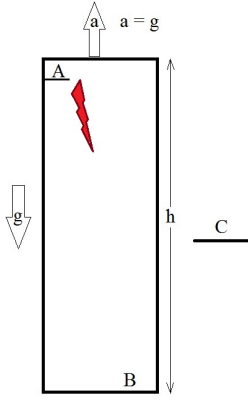
Relativitat per a *beginners*

Josep Planelles

January 17, 2020

1 La gravetat entra en acció

1.1 L'acció de la gravetat retarda els rellotges



El principi d'equivalència entre massa inercial i gravitatòria fa que siga equivalent un coet d'alçada h en un camp gravitatori d'acceleració g que el mateix coet en un espai lliure de camps en moviment accelerat amb acceleració igual a g (i signe contrari).

Simplificarem els càlculs considerant que $(\frac{v}{c})^2 \ll \frac{v}{c}$ i que $(\frac{gh}{c^2})^2 \ll \frac{gh}{c^2}$, de manera que ens quedem únicament amb els termes lineals.

Rebutjar $\beta^2 = (\frac{v}{c})^2 \approx 0$ equival a fer que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1$, de manera que la relativitat es converteix en mecànica Newtoniana. Tanmateix, si $(\frac{gh}{c^2})^2 \approx 0$ implica que el coet, en el temps en que una senyal lluminosa recorre la seua longitud h , està lluny d'assolir una velocitat relativista (i.e. $v \ll c$) si aquest coet parteix del repòs o d'una velocitat no relativista. I també, com calculem diferències $\Delta\tau$ de temps, la simultaneïtat no és un problema a efectes de càlcul. Finalment, i fent referència a la figura, C és un observador inercial, mentre que A i B estan dins del coet accelerat.

Des de C tenim que $z_B = \frac{1}{2}gt^2$ i $z_A = h + \frac{1}{2}gt^2$, de manera que a $t = 0$ trobem que $z_B = 0$, $z_A = h$ i el coet està quiet. Imaginem que a $t = 0$ la persona A emet un pols, que B rep en un temps posterior $t = t_1$ (vist per l'observador inercial C). En passar un temps $\Delta\tau_A$ s'envia un segon pols que és rebut en un temps posterior $t = t_1 + \Delta\tau_B$. Tenim doncs,

$$\begin{aligned} z_A(0) - z_B(t_1) &= c(t_1 - 0) \\ z_A(\Delta\tau_A) - z_B(t_1 + \Delta\tau_B) &= c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \end{aligned} \tag{1}$$

és a dir,

$$\begin{aligned} h - \frac{1}{2}gt_1^2 &= ct_1 \\ \left[h + \frac{1}{2}g\Delta\tau_A^2\right] - \left[\left(\frac{1}{2}g(t_1 + \Delta\tau_B)^2\right)\right] &= c(t_1 + \Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \end{aligned} \quad (2)$$

Considerem que $\Delta\tau_A^2 \ll \Delta\tau_A$, $\Delta\tau_B^2 \ll \Delta\tau_B$ de manera que ens quedem únicament amb els termes lineals en $\Delta\tau$. De l'eq. 2.1, que reescrivim en la forma,

$$t_1^2 + \frac{2c}{g}t_1 + \frac{2h}{g} = 0, \quad (3)$$

amb la identitat $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ si x és petit, trobem que:

$$t_1 = -\frac{c}{g} + \frac{c}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}} \approx \frac{h}{c} \quad (4)$$

De l'eq. 2.2, quedant-nos fins els termes lineals amb $\Delta\tau$, trobem:

$$\begin{aligned} \left(h - \frac{1}{2}gt_1^2\right) - gt_1\Delta\tau_B &= ct_1 + c(\Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \\ \rightarrow -gt_1\Delta\tau_B &= c(\Delta\tau_B - \Delta\tau_A) \\ \rightarrow \Delta\tau_A &= \Delta\tau_B\left(1 + \frac{gt_1}{c}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

que amb l'eq. 4, canviant t_1 per $\frac{h}{c}$, dóna lloc a:

$$\Delta\tau_A = \Delta\tau_B\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) \quad (6)$$

Finalment, amb $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, trobem:

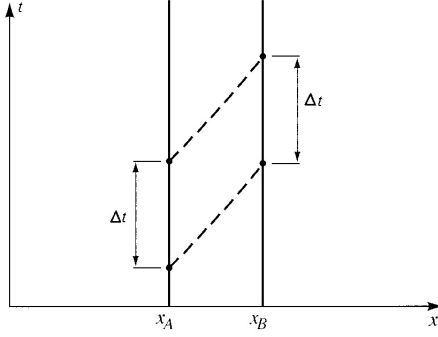
$$\Delta\tau_B = \Delta\tau_A\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)^{-1} \approx \Delta\tau_A\left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \quad (7)$$

Però $gh = \Phi_A - \Phi_B = \Delta\Phi$ és la diferència de potencial gravitatori entre A i B . En resum, com en B la gravetat és més forta que en A (i, per tant, el potencial gravitatori Φ_B és menor que Φ_A ¹), el temps $\Delta\tau_B$ és menor que $\Delta\tau_A$, $\Delta\tau_B = \Delta\tau_A(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2})$. És a dir, l'acció de les masses (atracció gravitatòria) retarda els rellotges.

En resum, el fet d'obligar a la constància de la velocitat c de la llum, malgrat que a la velocitat a que s'emet i a la que es rep són diferents, fa que els rellotges de l'emissor i receptor no vagin igual de ràpids. En particular, qui té major gravetat té el rellotge més lent.

¹Si considerem l'energia potencial $E_p = mgh$, qui està més a prop de terra és qui sent amb major intensitat la gravetat i té menys potencial. Si considerem el potencial gravitatori, $V = -G\frac{M}{r}$, distàncies r més petites experimenta més la gravetat i tenen menor potencial, és a dir, més negatiu.

1.2 Gravitació Newtoniana en termes de la mètrica de l'espai-temps



A la secció 2.3.6 de la Introducció (fitxer Introduction.pdf) mostrarem que la dinàmica en presència de potencial equival a moviment lliure (geodèsiques) en un espai-temps curvat. En altres paraules, se pot substituir el potencial gravitatori per una simple modificació de la mètrica de l'espai-temps de Minkowski.

Considerem el següent model de geometria de l'espai-temps:²

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\phi(\hat{r})}{c^2} \right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\phi(\hat{r})}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (8)$$

i, amb aquesta mètrica revisitem el problema de l'emissió de dues senyals lluminoses des d'una posició A separades per un interval temporal τ_A i el càlcul del temps τ_B entre les senyals rebudes en una altra posició B que té diferent potencial gravitatori.

Com emissor i receptor no estan en moviment, les seues *world lines* seran dues línies verticals en les posicions espacials x_A i x_B . Com hi ha la presència d'un potencial gravitatori les *world lines* de les senyals lluminoses ja no seran rectes de pendent unitat en el diagrama (ct, x) . Ara be, independentment de la forma de les *world lines*, atès que el potencial gravitatori no és funció del temps, seran línies possiblement no rectes però paral·leles. És a dir, *la seua separació temporal en el diagrama (ct, x) de l'espai-temps serà constant*, cosa que no vol dir que, en un espai de Minkowski deformat pel potencial, els temps propis siguin iguals, atès que tenen diferent posició espacial.

Efectivament, en el punt A la distància ds^2 entre els dos esdeveniments se calcularà a partir de l'interval temporal dt i els intervals espacials $dx = dy = dz = 0$, perquè A està en repòs:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2\phi_A}{c^2} \right) (cdt)^2 \rightarrow d\tau_A^2 = - \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 + \frac{2\phi_A}{c^2} \right) dt^2 \quad (9)$$

que, amb $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$, dóna lloc a:

$$d\tau_A = \left(1 + \frac{\phi_A}{c^2} \right) dt \quad (10)$$

amb $\phi_A = \phi(x_A, 0, 0)$.

Anàlogament, per al receptor:

$$d\tau_B = \left(1 + \frac{\phi_B}{c^2} \right) dt \quad (11)$$

²Triem aquest model, un poc més elaborat que l'emprat en la secció 2.3.6 de la Introducció perquè correspon al límit no relativista de les equacions relativistes (vegeu e.g. cap. 6 i 9 de [4]).

Des de les eqs. (10) i (11), amb $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, tenim:

$$\begin{aligned} d\tau_A \left(1 + \frac{\phi_B}{c^2}\right) &= d\tau_B \left(1 + \frac{\phi_A}{c^2}\right) \rightarrow d\tau_B = \left(1 + \frac{\phi_B}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\phi_A}{c^2}\right)^{-1} d\tau_A \approx \left(1 + \frac{\phi_B}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\phi_A}{c^2}\right) d\tau_A \\ &\rightarrow d\tau_B = \left(1 + \frac{\phi_B - \phi_A}{c^2} - \frac{\phi_A \phi_B}{c^4}\right) d\tau_A \approx \left(1 + \frac{\phi_B - \phi_A}{c^2}\right) d\tau_A \end{aligned}$$

on hem rebutjat l'infinitèsim superior, i.e. el terme en $1/c^4$. Per tant, amb $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B$, reescrivim aquest resultat en la forma

$$d\tau_B = \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right) d\tau_A \quad (12)$$

que és el mateix resultat que hem obtingut en la secció anterior.

1.3 Justificació de la mètrica emprada

Mostrarem que la condició de geodèsica en la mètrica de la secció anterior (mètrica de Schwarzschild) dóna lloc a l'equació de Newton.

Com el temps propi és $d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2}$ l'aplicació del principi extremal entre dos esdeveniments A i B per a S_{AB}^2 equival al de τ_{AB} . Escrivim doncs,

$$\begin{aligned} \tau_{AB} &= \int_A^B dt \sqrt{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} \\ &= \int_A^B dt \sqrt{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) v^2} = \int_A^B dt \sqrt{\left(1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{2\phi v^2}{c^4}\right)} \\ &\approx \int_A^B dt \sqrt{\left(1 + \frac{1}{c^2} (2\phi - v^2)\right)} \approx \int_A^B dt \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\phi - \frac{v^2}{2}\right)\right] \\ &= t_B - t_A - \frac{1}{c^2} \int_A^B \left(\frac{1}{2} v^2 - \phi\right) dt \\ &= t_B - t_A - \frac{1}{mc^2} \int_A^B L dt \end{aligned}$$

Amb L la Lagrangiana. La condició d'extrem de τ_{AB} equival doncs al principi de mínima acció, que equival a la vegada a l'eq. de Lagrange. Per tant,

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow -\frac{d}{dt} mv - m \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \rightarrow ma = -m \nabla \phi = F \quad (13)$$

que és la llei de Newton.

La gravetat Newtoniana pot ser expressada doncs en termes purament geomètrics en l'espai-temps de Minkowski deformat per la massa (la qual genera un canvi de la seua curvatura), de manera que les partícules es mouen per aquest espai al llarg de línies geodèsiques.

La llei gravitacional de Newton, be s'expressa en termes del potencial gravitatori, be s'expressa en termes de la deformació de la mètrica de Minkowski, és inconsistent amb els principis de relativitat perquè comporta una interacció instantània entre objectes, cosa que implica una transmissió a velocitat infinita, més gran doncs que la velocitat c de la llum.

El treball d'Einstein de 1915 va consistir a trobar el substitut de l'equació de Poisson que relaciona la densitat de matèria (fonts del potencial gravitatori) amb el potencial. Atès que el potencial hem vist que pot ser introduït com una modificació de la mètrica i que en el capítol següent veurem que la relativitat restringida introdueix l'equivalència entre massa i energia, el substitut de l'equació de Poisson relacionarà una magnitud que siga la mesura de la curvatura de l'espai-temps amb un altra que siga mesura de la densitat de la matèria-energia. Aleshores, a partir d'una distribució de la matèria-energia l'equació d'Einstein ens proporcionarà la geometria de l'espai, i les partícules es mouran sobre aquesta geometria al llarg de línies geodèsiques. Amb açò haurem determinat la seua dinàmica.

References

- [1] George B. Arfken, Mathematical Methods for Physicists Elsevier 2005
- [2] <http://www3.uji.es/planelle/APUNTS/SOLID/kp/EulerLagrange.pdf>
- [3] Kip S. Thorne, Black Holes and Time Warps, W.W. Norton and Company 1994
- [4] James B. Harte, Gravity: an introduction to Einstein's General Relativity, Addison-Wesley 2003