

Relativitat per a *beginners*

Josep Planelles

January 17, 2020

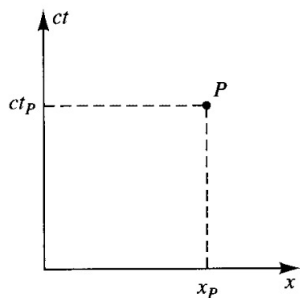
1 Geometria i Física: Diagrames espai-temps

1.1 Nota històrica

En 1905 Einstein va mostrar que espai i temps eren *relatius*. La longitud d'un objecte o el pas del temps eren diferents si eren contemplats des de eixos o sistemes de referència diferents. Mostrarem en aquests apunts que el temps que es contempla des d'un sistema de referència és una mescla del temps i de l'espai vist des d'un altre sistema de referència.

Hermann Minkowski, que va ser professor de matemàtiques d'Einstein en Zuric, va llegir el paper que del seu ex-alumne, del qual no tenia massa bona opinió, i, segons contenen les cròniques, va quedar molt impressionat.[3] El va estudiar amb deteniment, cosa que va fer que en 1908 descobrís la naturalesa *absoluta* de l'espai-temps tetradimensional. Quan Einstein es va assabentar del treball del seu antic professor *no* va quedar gens impressionat. Considerava que era una simple reescriptura de les lleis de la relativitat especial en una llengua nova, més matemàtica, que enfosquia les idees físiques que contenen les lleis relativistes. Fins i tot va fer algun acudit àcid al voltant del treball de Minkowski. Acudit que va tenir que engolir-se quan al cap de quatre anys, en 1912, es va adonar que l'espai absolut de Minkowski era essencial per poder incorporar la gravetat en la teoria de la relativitat. Per aquest motiu, aquestes notes breus comencen i es circumscriuen a estudiar trajectòries en l'espai de Minkowski.

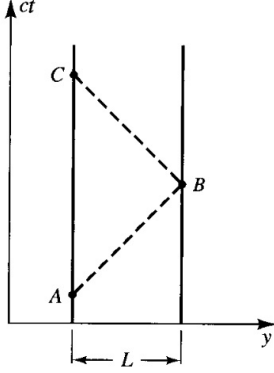
1.2 Espai-temps. Definició



És un diagrama (ct, x) , on t és el temps i x l'espai que, en general, és tridimensional. Un punt P en el diagrama s'anomena *esdeveniment* i té coordenades (ct_P, x_P, y_P, z_P) . Una partícula descriu una curva en l'espai-temps anomenada "línia de mon" (*world line*).

El pendent de la *world line* és: $\frac{d(ct)}{dx} = \frac{c}{v_x}$. Per tant, una velocitat zero implica pendent infinita (línia vertical). Una velocitat $v_x = c$ implica pendent unitat, és a dir, un angle $\theta = 45^\circ$.

1.3 Invariant de l'espai-temps



Considerem dos espills paral·lels separats una distància L al llarg de l'eix y que estan en repòs en un sistema inercial de coordenades (ct, x, y, z) i una senyal de llum que rebota d'un a l'altre espill. Un rellotge mesura el temps Δt entre l'esdeveniment A en que la llum surt de l'espill inferior i l'esdeveniment C en que, després de rebotar en B torna a l'espill inferior (C). Aquest dos esdeveniments estan separats pels intervals de coordenades $\Delta t = \frac{2L}{c}$, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$.

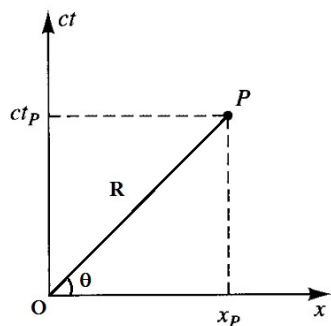
Analitzem aquest mateix experiment des d'un altre sistema inercial (ct', x', y', z') que es mou amb velocitat v respecte (ct, x, y, z) al llarg de la direcció negativa de l'eix x . En aquest sistema els espills es mouen amb velocitat v en la direcció positiva de l'eix x . Per tant, a mesura que el senyal recorre $2L$ sobre l'eix y , recorre també $\Delta x'$ sobre l'eix x' amb $\Delta x' = v\Delta t'$. La distància total recorreguda entre A i B és $\sqrt{L^2 + (\frac{\Delta x'}{2})^2}$, mentre que entre A i C serà el doble. A partir de la velocitat c de la llum determinem $\Delta t'$: $\Delta t' = \frac{1}{c} 2 \sqrt{L^2 + (\frac{\Delta x'}{2})^2}$. Els intervals de coordenades en el sistema mòbil són:

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \sqrt{L^2 + (\frac{\Delta x'}{2})^2}; \quad \Delta x' = v\Delta t'; \quad \Delta y' = 0; \quad \Delta z' = 0 \quad (1)$$

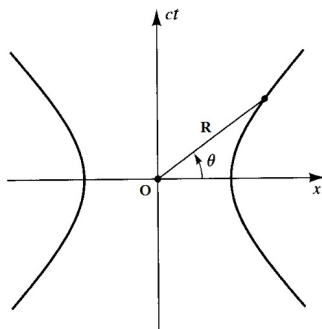
Si calculem la magnitud $\Delta S'^2$ que definim: $\Delta S'^2 = -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$ trobem $\Delta S'^2 = -4L^2$. Calculem ara la magnitud $\Delta S^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = -(c\frac{2L}{c})^2 = -4L^2$. Per tant, $\Delta S'^2 = \Delta S^2$. En general, la magnitud $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ és *invariant* sota canvis de sistemes de referència inercials.

En la secció 2 del document anterior (IntroductionTR.pdf) vam deduir l'element de longitud en coordenades curvilínies (Eq. 2 d'aquell document): $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dq_i dq_j$. Per tant, podem interpretar l'invariant ds^2 de Minkowski trobat adés com la distància (*absoluta* per ser invariant) entre dos esdeveniments A i C de l'espai-temps, el qual presenta una mètrica diagonal però no Euclidiana:¹ $g_{11} = -1, g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1$.

¹Si g_{11} no tinguera el signe negatiu la mètrica seria Euclidiana.



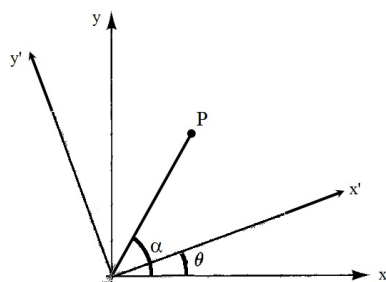
Si ens restringim al plànol (ct, x) i la geometria fos Euclidiana tenim que, vegeu la figura, $x = R \cos \theta$, $ct = R \sin \theta$, de manera que $x^2 + (ct)^2 = R^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = R^2$, que és el quadrat de la distància Euclidiana OP . Però l'espai-temps no és Euclidià atès que $R^2 = -(ct)^2 + x^2$, equació que representa una hipèrbola.²



Si escrivim $x = a(\theta)R$, $ct = b(\theta)R$, el quadrat de la distància R^2 en l'espai-temps és:

$$R^2 = -(ct)^2 + x^2 = (-b(\theta)^2 + a(\theta)^2) R^2.$$

Identifiquem $a(\theta) = \cosh \theta$, $b(\theta) = \sinh \theta$ perquè³ $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$.



A l'espai Euclidià la transformació de coordenades que deixa invariant les distàncies són les rotacions. En la figura tenim que: $x = R \cos \alpha$, $y = R \sin \alpha$, $x' = R \cos(\alpha - \theta)$, $y = R \sin(\alpha - \theta)$. És immediat comprovar, amb $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$, que $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = R^2$.

Tanmateix, $x' = R(\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta) = x \cos \theta + y \sin \theta$, $y' = R(\sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta) = -x \sin \theta + y \cos \theta$. És a dir

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2)$$

A l'espai-temps $x = R \cosh \alpha$, $ct = R \sinh \alpha$, $x' = R \cosh(\alpha - \theta)$, $y = R \sinh(\alpha - \theta)$, i és també immediat comprovar, amb $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$, que $-(ct)^2 + x^2 = -(ct')^2 + x'^2 = R^2$. Tanmateix,⁴ $x' = R(\cosh \alpha \cosh \theta - \sinh \alpha \sinh \theta) = x \cosh \theta - (ct) \sinh \theta$, $ct' = R(\sinh \alpha \cosh \theta - \cosh \alpha \sinh \theta) = -x \sinh \theta + (ct) \cosh \theta$. És a dir,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta \\ -\sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}. \quad (3)$$

²En un espai Euclidià $R^2 = (ct)^2 + x^2$, que representa una circumferència.

³ $\sinh \theta = \frac{1}{2}(e^\theta - e^{-\theta})$; $\sinh(-\theta) = -\sinh \theta$, $\cosh \theta = \frac{1}{2}(e^\theta + e^{-\theta})$; $\cosh(-\theta) = \cosh \theta$.

⁴ $\sinh(\alpha \pm \theta) = \sinh \alpha \cosh \theta \pm \cosh \alpha \sinh \theta$, $\cosh(\alpha \pm \theta) = \cosh \alpha \cosh \theta \pm \sinh \alpha \sinh \theta$.

Imaginem una partícula que recorre una longitud $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2$ (vist des d'un sistema inercial) o $ds^2 = -(cdt')^2 + dx'^2$ (vist des d'un altre). Imaginem que la partícula està en repòs en el segon sistema, i.e. $dx' = 0$. Aleshores, $dx' = dx \cosh \theta - (cdt) \sinh \theta = 0$. Amb $v = \frac{dx}{dt}$ deduïm que:

$$\tanh \theta = \frac{v}{c} \quad (4)$$

Podem ara trobar les equacions de transformació d'eixos en termes de la velocitat. A partir que $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$ escrivim $1 - \tanh^2 \theta = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\cosh^2 \theta}$. D'on deduïm que:

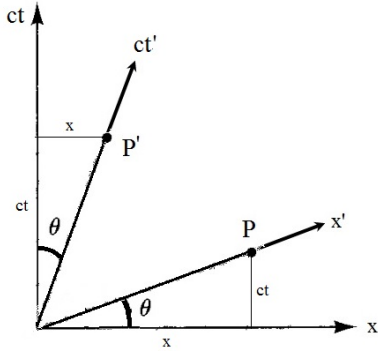
$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \quad (5)$$

on hem definit el factor γ que d'ara en avant eixirà en moltes expressions.

Ara, des de $\sinh^2 \phi = \cosh^2 \phi - 1 = \gamma^2 - 1 = \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}$, trobem que $\sinh \theta = \frac{v}{c} \gamma$. Aleshores tenim que:

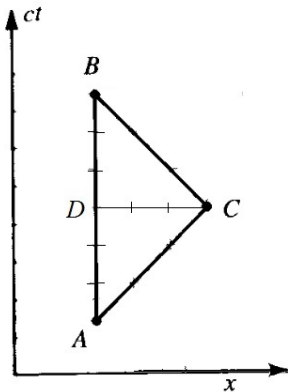
$$x' = x \cosh \theta - (ct) \sinh \theta = \gamma (x - vt) \quad (6)$$

$$t' = -\frac{x}{c} \sinh \theta + t \cosh \theta = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \quad (7)$$



Procedim ara a representar l'eix x' en el sistema (ct, x) . Fem, per tant, que $t' = 0$. Des d'Eq.(7) trobem $t = \frac{v}{c^2} x \rightarrow ct = \tanh \theta x$ (recta de pendent $\tanh \theta$). Anàlogament fem $x' = 0$ per trobar l'eix t' . Des d'Eq.(6): $x = vt = \frac{v}{c} (ct) = \tanh \theta (ct)$ que és la recta de pendent inversa, és a dir la que creix en x el que l'anterior eix creixia en (ct) i vice-versa.

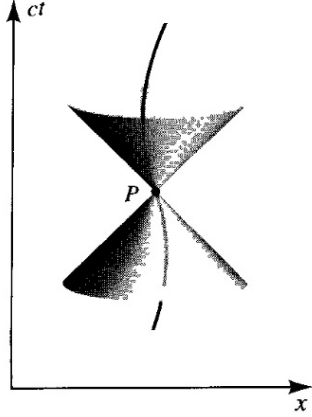
1.4 Conus de llum i percepció de distàncies en l'espai-temps: *dilatació temporal*



A la vista de la figura $\Delta S_{ADB}^2 = 36$, $\Delta S_{DC}^2 = 9$. Si la mètrica és Euclidiana, aleshores, $\Delta S_{AC}^2 = \Delta S_{AD}^2 + \Delta S_{DC}^2 = 9 + 9 = 18 = \Delta S_{BC}^2$. La hipotenusa és major que els catets. Amb la mètrica de l'espai-temps $\Delta S_{BC}^2 = -\Delta S_{BD}^2 + \Delta S_{DC}^2 = -9 + 9 = 0$. Anàlogament, $\Delta S_{AC}^2 = 0$, mentre que $\Delta S_{ADB}^2 = -(c\Delta t)^2 = -36$.

Amb aquesta mètrica hi ha distàncies positives, $\Delta S_{DC}^2 = 9 > 0$, en el qual cas direm que els esdeveniments tenen una separació tipus *espacial*. Hi ha distàncies negatives, $\Delta S_{ADB}^2 = -36 < 0$, i parlem de separació tipus *temporal*. Finalment hi ha distàncies nul·les, $\Delta S_{AC}^2 = 0$. Aquests són esdeveniments units per *world lines* de pendent unitat, en les quals $ds^2 = 0 = -(cdt)^2 + dx^2 \rightarrow \frac{dx}{dt} = c$. Són esdeveniments amb una separació tipus *llum*. El conjunt de punts separats per distàncies zero d'un punt P s'anomena *conus de llum*.

Per supòst, com les distàncies ds^2 són invariants respecte del canvi de sistema inercial, les definicions de separació espacial, temporal o nul·la són independents del sistema inercial que triem.



Les partícules de massa en repòs no zero es mouen al llarg de *world lines* de tipus temporal, que sempre queden dins del conus de llum, ja que la seua velocitat és menor que la velocitat c de la llum. Per mesurar la distància al llarg de la *world line* d'una partícula podem usar un sistema soldat a la partícula. En tal cas, $dx^2 = 0$, $ds^2 = -(cd\tau)^2$, on hem emprat lletra τ per referir-nos al temps propi.

En qualsevol altre sistema el valor de ds^2 ha de ser la mateixa. La seua expressió és però $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2$. Per tant, amb $v = \frac{dx}{dt}$, $-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 \rightarrow \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$ i, per tant,

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} \quad (8)$$

El temps propi és sempre menor que el mesurat des d'un sistema no soldat a la partícula (*dilatació temporal*).

1.4.1 Simultaneïtat relativista. Contracció espacial

Considerem que una corda en repòs en un sistema d'eixos inercial S' té una longitud pròpia L_0 . Considerem que aquesta corda i el sistema inercial d'eixos soldats a la corda es mouen a una velocitat v respecte un altre sistema d'eixos inercial S , on mesurem la longitud de la corda obtenint un valor diferent L . La determinació de la longitud (en aquest i qualsevol altre sistema d'eixos) necessita simultaneïtat en la mesura de les posicions dels extrems de la corda. Ara bé, simultaneïtat en S implica no simultaneïtat en S' . La separació temporal $\Delta t'$ en S' la podem però calcular des de la invariància de l'element de longitud a l'espai de Minkowski: $\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + \Delta x^2 = -(c\Delta t')^2 + \Delta x'^2$. Si considerem simultaneïtat en S , aleshores $\Delta t = 0$, de manera que:

$$\Delta x^2 = \Delta x'^2 - (c\Delta t')^2$$

Tanmateix, des de l'equació (7) podem escriure $t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x')$, atès que S i S' han de poder usar les mateixes equacions, amb la salvetat que S i S' tenen velocitats oposades. Per tant, $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x')$. Incloent-hi la

simultaneïtat $\Delta t = 0$, i.e., fent $\Delta t = 0 = \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x')$, obtenim:

$$\Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x' \quad (9)$$

Per tant:

$$\Delta x^2 = \Delta x'^2 - c^2(-\frac{v}{c^2} \Delta x')^2 = \Delta x'^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})$$

i.e.,

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (10)$$

com $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$, $L_0 > L$ que ens indica que la longitud L mesurada en uns eixos no soldats a la corda és menor que la longitud pròpia L_0 (*contracció espacial*).

En resum, vist des del sistema de referència mòbil (no soldats al sistema) els temps són més llargs i les distàncies més curtes.

1.5 La paradoxa dels besons

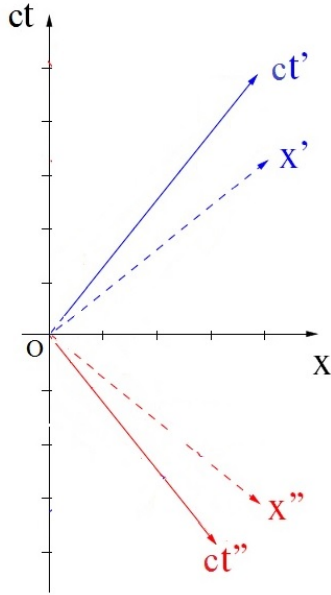
Dos besons, Diana i Apol·lo estan en la terra. Aleshores Diana inicia un viatge a velocitat constant $v = 0.8c$ cap a α -centaure que està a una distància de 4 anys llum ($L = 4c$). En aplegar a la destinació torna immediatament a la mateixa velocitat, aterrant al punt de partida. En la terra, on està Apol·lo, ha passat un temps $\Delta t = 10$ anys, atès que a una velocitat $v = 0.8c$ se tarden 5 anys en aplegar a α -centaure que està a una distància de 4 anys llum ($\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{4c}{0.8c} = 5$).

Fent ús de l'eq. (7) Apol·lo pot saber el temps que ha passat per a Diana: $\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x) = \gamma(\Delta t - \frac{v^2}{c^2} \Delta t) = \frac{\Delta t}{\gamma}$. Si $v = 0.8c$, aleshores, $\gamma = 5/3$. Com el temps $\Delta t = 10$, aleshores, $\Delta t' = \frac{3}{5} 10 = 6$ anys. Apol·lo troba Diana 4 anys més jove que ell.

Podem resoldre el problema des del punt de vista de Diana. Ella veu a Apol·lo (i a la terra) allunyar-se a una velocitat $v = 0.8c$. Quan per a Diana han passat 6 anys, se tornen a trobar. Però ella calcula el temps que ha passat per a Apol·lo: $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{3}{5} 6 = 3.6$. És a dir, ella espera trobar Apol·lo 2.4 anys més jove que ella... què està mal en aquest raonament?

El càlcul d'Apol·lo és correcte, però el de Diana no perquè ella fa ús de *dos* sistemes inercials de referència diferents. De fet, ella nota el canvi brusc de sistema inercial com un impuls que fa que la seua velocitat canvie de signe (encara que ella pugui creure que és Apol·lo i la terra la que rebota i torna).

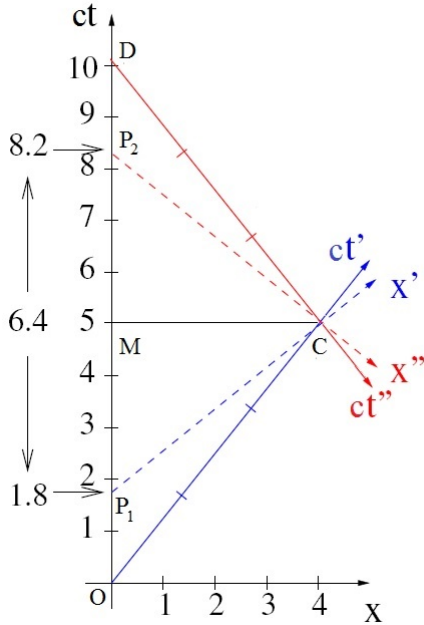
Dibuixarem els tres sistemes inercials i sobre ells calcularem distàncies ds^2 que són invariants i, per tant, no varien en canviar d'un sistema inercial a un altre.



Considerem el sistema inercial soldat a Diana en la primera part del camí (fins que aplega a α -centaure). Com $v = 0.8c$, tenim que $\tanh \theta = v/c = 0.8$. D'acord amb el que hem vist al final de la secció 1.3, l'eix x' és la recta $ct = \tanh \theta x$ en el sistema (ct, x) , mentre que l'eix ct' és la recta $ct = \frac{1}{\tanh \theta} x$.

En el camí de tornada $v = -0.8c$, per tant $\tanh \theta = -0.8$. Les equacions dels tercers eixos són les mateixes excepte que ara les pendents són negatives.

En el sistema (ct, x) el viatge de Diana arranxa de l'origen i segueix l'eix ct' (perquè així la coordenada x' no canvia) fins aplegar a α -centaure ($x = 4c, ct = 5c$). Aleshores, canvia de sistema inercial i segueix l'eix ct'' (perquè així la coordenada x'' no canvia) fins tornar a la terra ($x = 0, ct = 10c$).



En la figura de l'esquerra hem ubicat els dos sistemes mòbils en la posició d' α -centaure.

A l'instant immediatament anterior al rebot, tots els punts de l'eix x' són òbviament simultanis (tots tenen la mateixa coordenada temporal). En el sistema (ct', x') de Diana C és simultani a P_1 .

A l'instant immediatament posterior al rebot, tots els punts de l'eix x'' són òbviament simultanis (tots tenen la mateixa coordenada temporal). En el sistema (ct'', x'') de Diana C és simultani a P_2 .

Per tant, Diana pateix un canvi sobtat de simultaneïtat des del punt P_1 al punt P_2 : veu que Apol·lo de sobte envellix.

La distància OP_1 és el temps que Diana calcula que li passarà a Apol·lo mentre ella arriba a α -centaure en un temps propi $\Delta t = \tau = 3$ anys. Per tant: $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{3}{5} 3 = 1.8$ anys. Tanmateix, $OM = 5c$, $MC = 4c$, distàncies (invariants) que podem calcular fàcilment sobre el sistema (ct, x) . Finalment, calculem $OC = 3c$ fent ús del sistema (ct', x') . Efectivament, comprovem que $-(5c)^2 + (4c)^2 = -(3c)^2$. Per tant, podem calcular $P_1M = 5c - 1.8c = 3.2c$ de manera que el canvi de simultaneïtat de Diana, $P_1P_2 = 6.4c$.

El viatge de tornada li costa a Diana 3 anys propis i calcula que per a Apol·lo en passen 1.8. Aleshores, sumant el canvi de simultaneïtat de Diana als temps d'anada i tornada trobem: $1.8 + 6.4 + 1.8 = 10$, amb la qual cosa no hi ha contradicció.

La gran força experimentada per Diana en el rebot li *enrellenteix* els temps, de manera que mentre per Apol·lo passen 6.4 anys, per a Diana passa tans sols un instant. En el capítol següent veurem amb més detall com la gravetat enrellenteix el temps.

References

- [1] George B. Arfken, Mathematical Methods for Physicists Elsevier 2005
- [2] <http://www3.uji.es/~planelle/APUNTS/SOLID/kp/EulerLagrange.pdf>
- [3] Kip S. Thorne, Black Holes and Time Warps, W.W. Norton and Company 1994
- [4] James B. Haultre, Gravity: an introduction to Einstein's General Relativity, Addison-Wesley 2003