

Relativitat per a *beginners*

Josep Planelles

January 17, 2020

1 Equació d'Einstein

L'equació d'Einstein, la qual relaciona la curvatura amb la densitat de massa-energia, és una equació fonamental de la física i per tant no pot ser deduïda de ninguna física *més fonamental*. El mateix passa amb l'equació de Newton o la de Schrödinger. Tanmateix, com aquestes, pot ser motivada a partir d'arguments raonables. En últim extrem, la seua validació, com la validació de les equacions de Newton o de Schrödinger, la proporciona una reexida comparació amb l'experiment.

L'equació Newtoniana que descriu el potencial gravitatori és l'equació de Poisson $\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho$ (veure cap. 2.2 d'IntroductionTR.pdf). Aquesta equació ens permet calcular el potencial gravitatori a partir del coneixement de la distribució de masses que injectem en l'equació a través de la densitat ρ . Ara be, en teoria relativista hi ha equivalència entre massa i energia, $E = mc^2$. Tanmateix, l'energia està relacionada amb el moment, $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$ (vegeu eq. 2 en Miscellania.pdf). Massa, energia i moment estan doncs relacionats. Per tant, sembla raonable assumir que la font de la gravitació en relativitat incloga massa, energia i moment. En mecànica newtoniana la gravitació deriva de la massa, que és un escalar. Aleshores sorgeix la qüestió si l'equivalent relativista de la massa, que serà la font de la gravitació en relativitat, és una magnitud escalar o no.

Per donar llum a aquesta qüestió considerem un element de volum $dV = dxdydz$ ocupat per partícules no interaccionants, totes en repòs en un determinat sistema de referència S' (el *núvol de pols*). En S' el núvol té una densitat $\rho_0 = m_0 n_0$, on m_0 és la massa de la partícula de pols i n_0 el nombre de partícules per unitat de volum.

Des d'un altre sistema S , que es mou en la direcció x amb una velocitat v respecte S' , la massa es veu més gran, $m = m_0 \gamma$ i la longitud al llarg de l'eix x més petita, $\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$ (en el sistema de referència soldat al sistema els temps són més llargs i les distàncies més curtes -vegeu sec. 1.4 en Geometria_iFisica.pdf). Tanmateix Δy i Δz no se veuen afectats, cosa que comporta que el volum $\Delta V' = \frac{\Delta V}{\gamma}$. Com el nombre de partícules N és fix, aleshores, $n' = \frac{N}{\Delta V'} = \frac{N}{\Delta V} \gamma = n_0 \gamma$. Finalment, $\rho = m n' = m_0 \gamma n_0 \gamma = \rho_0 \gamma^2$.

A la vista d'aquest resultat, està clar que ρ no és un escalar, en el sentit de ser invariant respecte un canvi de sistema inercial (com per exemple ho és el nombre de partícules). Tampoc és un vector de l'espai-temps com ara la velocitat *four-velocity* que, en el sistema soldat a la partícula és $U' = (c, 0, 0, 0)$, mentre que el sistema S és $U = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$ (vegeu sec. 1 de Miscellania.pdf). ρ se comporta com un tensor d'ordre dos, atès que se transforma amb γ^2 . Més concretament, com la component tt d'aquest tensor.

Com el vector *four-velocity* és $U = \gamma(c, v_x, v_y, v_z)$, podem escriure que $\gamma^2 = \frac{1}{c^2} U^t U^t = \frac{1}{c^2} T^{tt}$, on definim T^{ij} com el tensor energia-moment. La seua component tt és la densitat d'energia ρc^2 . Podem interpretar igualment el significat de les altres components. Per exemple:

$$T^{tx} = \rho_0 U^t U^x = \rho_0 \gamma \gamma v_x = m_0 \gamma n_0 \gamma v_x = mn v_x = \frac{mn A v_x dt}{Adt} = \frac{mn A d_x}{Adt} = \frac{mndV}{Adt} = \frac{mdN}{Adt}$$

que representa el flux de matèria a través de l'àrea dA en dt .

De manera semblant,

$$T^{xy} = \rho_0 U^x U^y = m_0 \gamma n_0 \gamma v_x v_y = (mv_x)nv_y = \frac{p^x n A v_y dt}{Adt} = \frac{p^x dN}{Adt}$$

que representa el flux del moment p^x en la unitat de temps en la direcció y . També podem obtenir que $T^{xy} = \frac{p^y dN}{Adt}$ que és el flux de p^y en la direcció x .

En l'espai-temps de Minkowski (relativitat especial) les lleis de conservació de l'energia i moment podem expressar-les de la següent manera:

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0 \quad (1)$$

Per exemple, si $i = t$ tenim: $T^{tt} = \rho c^2$, $T^{tx} = \rho c v_x$, $T^{ty} = \rho c v_y$, $T^{tz} = \rho c v_z$. Per tant,

$$\frac{\partial T^{ti}}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho c^2}{\partial ct} + \frac{\partial \rho c v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho c v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho c v_z}{\partial z} = c \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \hat{v}) \right)$$

La quantitat entre parèntesis igualada a zero és l'equació de continuïtat d'un fluid. Si definim $\hat{u} = (c, \hat{v})$, aleshores podem escriure:

$$\frac{\partial T^{ti}}{\partial x^i} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \hat{u}) \quad (2)$$

que representa la divergència en quatre coordenades.

Tanmateix, poden reescriure l'equació (1) en la forma:

$$\vec{\nabla}_j \cdot T^{ij} = 0 \quad (3)$$

que inclou en una única equació les 4 lleis de conservació. Recordem que en espais no curvilinis, la derivada i la derivada covariant coincideixen, però en presència de gravetat l'espai se corba i la derivada covariant inclou termes addicionals (veure eq. 10 en IntroductionTR.pdf). Per tant, tot i que continua sent cert que $\vec{\nabla}_j \cdot T^{ij} = 0$,

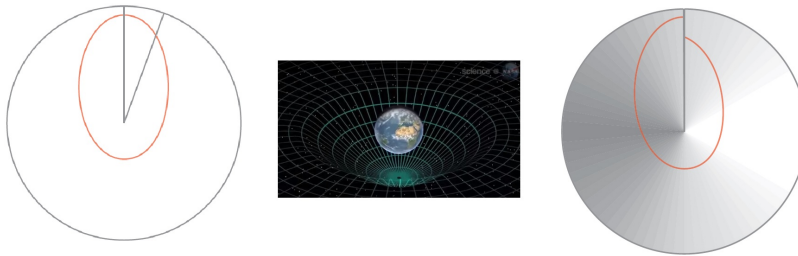
acò ja no representa un principi de conservació. Físicament podem entendre perquè la derivada covariant no és zero (encara que si que ho es la divergència): l'energia gravitacional no està inclosa en el *four-moment* i per tant, no està inclosa en el tensor energia-moment.

Una volta trobat l'equivalent relativista T^{ij} de la massa, caldrà trobar l'equivalent relativista G de l'altra banda de l'equació de Poisson ($\nabla^2\Phi$). Per trobar-lo ens podem recolzar en tres premisses: (1) com volem escriure una equació paral·lela a la de Poisson, $G = kT^{ij}$, caldrà que G siga com T^{ij} . És a dir un tensor de segon ordre simètric i de divergència zero. (2) L'acció del potencial gravitatori entra com un canvi en la mètrica. Per exemple g_{00} passa des de $g_{00} = -1$ en l'espai de Minkowski a $g_{00} = -(1 + \frac{2\Phi}{c^2})$ en la mètrica del límit no relativista (veure sec. 1.2 de Gravetat_en_accio.pdf). Per tant, G haurà de contenir segones derivades de la mètrica. (3) El límit no relativista de petites velocitats i potencials gravitatoris, l'equació $G = kT^{ij}$ haurà de convertir-se en l'equació de Poisson.

Les condicions 1 i 2 la compleix el tensor d'Einstein $G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} R$, on R^{ij} és el tensor de Ricci i R la curvatura escalar (veure Miscellania.pdf cap 2.1). En determinar el compliment de la condició 3 determinem indirectament el valor del factor k . La comprovació de la condició 3 la podeu trobar en e.g. Haltre[4] cap. 22.4. Amb tot açò l'equivalent relativista de l'equació de Poisson, $\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho$, resulta:

$$G^{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{ij}. \quad (4)$$

Ara començaria la part realment interessant que és resoldre aquesta equació i trobar les prediccions relativistes del comportament de l'univers. Però aquest és un tema tècnic complex que va més enllà d'aquests notes, escrites per un *begginer* i dedicada a altres que vulguen iniciar-se en aquesta apassionant teoria. Com a dada anecdòtica comentaré que l'eq. (4) **no** és l'equació inicialment proposada per Einstein. La primera equació que va proposar en lloc de G^{ij} va usar el tensor de Ricci. Tot i així va poder trobar com la deformació de l'espai explicava que mercuri no tingues una òrbita el·líptica tancada sinó que traçara una espècie de rosseta (precessió del periheli de l'òrbita de Mercuri), com indica la figura adjunta, on se veu que en deformar-se l'espai, l'òrbita el·líptica tancada deixa de ser tancada. Posteriorment, es va adonar de la inconsistència d'emprar el tensor de Ricci de divergència no zero. El va rectificar restant-li un factor que permetia fer zero la divergència i va definir així el tensor que es coneix amb el nom de tensor d'Einstein, i va proposar l'eq. (4), que és universalment acceptada com l'equació relativista que relaciona la gravitació amb les fonts que l'originen.



References

- [1] George B. Arfken, Mathematical Methods for Physicists Elsevier 2005
- [2] <http://www3.uji.es/~planelle/APUNTS/SOLID/kp/EulerLagrange.pdf>
- [3] Kip S. Thorne, Black Holes and Time Warps, W.W. Norton and Company 1994
- [4] James B. Haultre, Gravity: an introduction to Einstein's General Relativity, Addison-Wesley 2003