EL TIEMPO ES RELATIVO

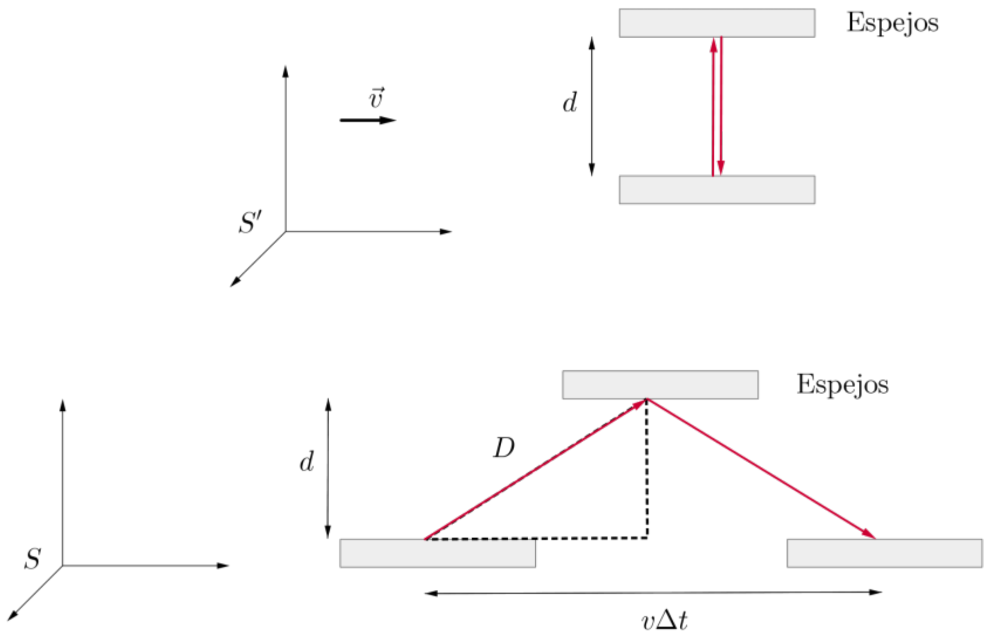
Es fácil entender que si la simultaneidad es relativa, los intervalos temporales también. Mientras para el observador interno al tren ambos detectores han hecho clic, para el externo no. Si antes de partir el tren, ambos acuerdan que el tiempo medido desde que se enciende la bombilla hasta que ambos detectores hacen clics es un segundo, el observador en el andén verá que el reloj del observador del tren se atrasa si el tren está en movimiento, y lo mismo pensará el observador del tren respecto al observador del andén.

Vamos a intentar encontrar una expresión que relacione los intervalos temporales medidos por ambos observadores. Para ello, recurramos a un nuevo *gedankenexperiment*.

Supongamos que cada observador porta un reloj. **El reloj más sencillo del mundo: un rayo luminoso reflejándose entre dos espejos**. Te puedes imaginar una bolita (el fotón) rebotando entre ambos si eso te ayuda, e incluso imaginarte que cada vez que el fotón rebota en un espejo escuchas un sonoro clic. Antes de montarse en el tren, ambos ponen sus relojes a funcionar a la vez y observan que los clics de ambos espejos están acompasados. Si acuerdan que miden el tiempo contando el número de clics, ambos medirán idénticos intervalos temporales entre dos sucesos.

Pero ahora uno de ellos se monta en un tren que posteriormente se pone en movimiento uniforme. Dado que él, junto con su reloj, están en reposo respecto al tren, sin duda verá al fotón rebotando en trayectorias verticales entre ambos espejos.

Pero el observador externo verá que lo que ocurre es bien distinto: dado que el tren avanza conforme el fotón rebota, **su trayectoria no es vertical, sino oblicua**. Esto es similar a cuando una persona lanza una pelota verticalmente dentro de un coche en movimiento: ve que asciende y desciende hasta su mano sin desviarse de la vertical. Pero una persona en la acera verá que la pelota ha realizado una parábola. En la siguiente imagen puedes ver un esquema de la situación:



Esquema con lo que ve el observador en movimiento S' y el observador en reposo S.

Fíjate que, como el movimiento es relativo, el observador del tren será el que vea al fotón del reloj del observador externo realizar las trayectorias oblicuas entre rebote y rebote. En cada caso, el observador en reposo considera que el tiempo corre más lento (el fotón tarda más en hacer una ida y vuelta) para el observador en movimiento. Esto es general para todos los procesos, no solo nuestro sencillo reloj. Y ya no solo todos los procesos mecánicos, sino físicos (el crecimiento de tu cabello, el latido de tu corazón…), pues sino, podrías idear algún tipo de experimento que te permitiera comprobar que estás en movimiento, lo cual aceptamos que no es posible.

Sea el intervalo entre dos rebotes (ida y vuelta) del fotón $\Delta t'$ medido por el observador en movimiento S', y sea Δt el intervalo entre dos rebotes que observa el observador externo S del reloj del observador interno. Vamos a intentar encontrar una expresión que relacione ambos intervalos teniendo en cuenta que ambos observadores miden la misma velocidad de la luz.

Para el observador S', el fotón recorre la distancia $2d$ en su ida y vuelta, con lo que escribirá que el tiempo que ha tardado el fotón en realizar tal vaivén ha sido

$$\Delta t' = \frac{2d}{c} \longleftrightarrow d = \frac{c\Delta t'}{2}$$

En cambio, el observador S verá que el fotón recorre la hipotenusa D de un triángulo rectángulo en la subida y en la bajada, de catetos $v\Delta t$ y d, con lo que mide (fíjate que usamos la misma velocidad de la luz, no se ve «afectada» por el movimiento de S')

$$\Delta t = \frac{2D}{c} \longleftrightarrow D = \frac{c\Delta t}{2}$$

Por el teorema de Pitágoras, podemos expresar D como:

$$D = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}$$

Dado que conocemos d y D en función de los intervalos temporales, lo podemos juntar todo en una expresión que involucre solo a ambos intervalos temporales:

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{\frac{c^2\Delta t'^2}{4} + \frac{v^2\Delta t^2}{4}}$$

Pasamos c multiplicando a la izquierda, y elevando al cuadrado para eliminar la raíz cuadrada queda

$$c^2\Delta t^2 = c^2\Delta t'^2 + v^2\Delta t^2$$

Ahora solo falta despejar Δt en función de $\Delta t'$, lo cual no debería ser difícil. (Aun así, cualquier duda pregúntala en los comentarios). Tras ello…

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

¡Obtenemos la famosísima ecuación de dilatación temporal! Por acercarnos a la notación de los libros de texto, se suele denotar al cociente (v/c) como β, define el factor de Lorentz como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Fíjate que, dado que es imposible desplazarse a la velocidad de la luz (entre otras cosas porque contradice el postulado de que la velocidad de la luz ha de ser la misma para todos los observadores), $\beta < 1$, y $\gamma > 1$. Con ello:

$$\Delta t > \Delta t'$$

¡**El observador S considera que los relojes de S' corren más lentos**! Pero es que resulta que... **¡El observador S' considera que los relojes de S son los que corren más lentos!** No solo los intervalos temporales se dilatan, sino que esta dilatación es relativa.

Aquí llegamos a la conocida **paradoja de los gemelos:** un gemelo parte en una nave espacial, dispuesto a realizar un vuelo galáctico a velocidades cercanas a la de la luz. Dado que irá a velocidades arbitrariamente altas, puede darse el caso de que mientras que en la Tierra pasan cuarenta años, en la nave pase un año (o cualquier otra cantidad de tiempo en función de la velocidad) *medidos desde la Tierra*. Y ahí esta la paradoja: el observador en la nave tiene todo el derecho del mundo a considerarse en reposo, y por tanto considerar que es el reloj de su gemelo en la Tierra el que corre más lento.

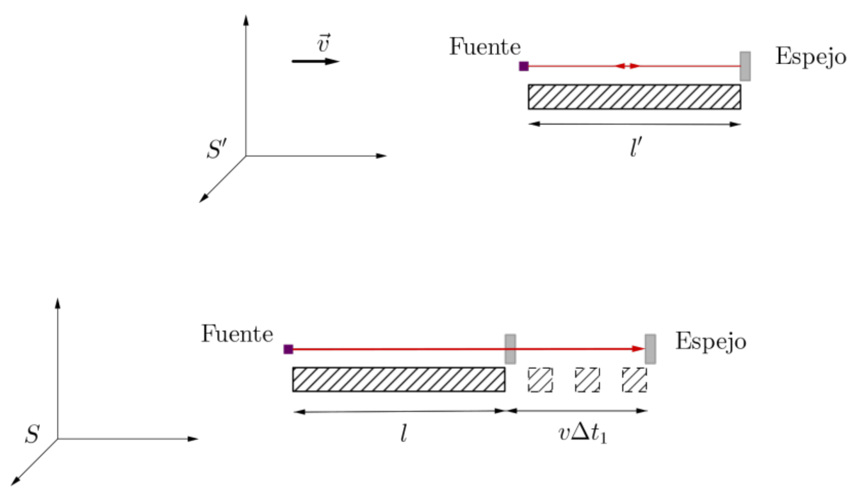
A su vuelta, **¿cuál de los dos habrá envejecido?** Pues... el que estaba en la nave. La respuesta se puede desmenuzar a varios niveles, pero lo más sencillo es darse cuenta de lo siguiente: el observador en la nave no ha permanecido todo el trayecto en un sistema de referencia inercial, pues la nave debe acelerar cuando dé media vuelta en aras de regresar. **Tenemos una asimetría que rompe la paradoja.** Esta no es la única *aparente paradoja* que se presenta al reflexionar sobre la teoría de la relatividad. Quizá en un futuro no muy lejano hagamos una entrada recopilando las más famosas 😉

EL ESPACIO ES RELATIVO

De igual manera que la relatividad de la simultaneidad implicaba la relativida
los intervalos temporales, ¡también implica la de los intervalos espaciales!

A poco que lo medites, verás que es lógico: medir la longitud de un objeto consiste en marcar simultáneamente sus dos extremos... Pero espera, ¿no habíamos quedado en que la simultaneidad es relativa? Un observador puede creer que los marca simultáneamente, mientras que otro que vea a ese observador en movimiento junto con el objeto verá que no lo ha hecho.

Para encontrar una expresión entre las longitudes medidas en dos sistemas inerciales planteemos un nuevo *gedankenexperiment* (les hemos pillado el gusto). Una manera «sencilla» de medir la longitud de, digamos, una vara, sería colocar una fuente de luz (que también valga como detector) en un extremo y un espejo en el otro. Supongamos que se realiza esta medición en un sistema S', y supongamos que se mueve respecto a otro sistema S a velocidad $\vec{v}$:



El observador S' medirá que la luz tarda en hacer la ida y vuelta

$$\Delta t' = \frac{2l'}{c}$$

con l' la longitud en S' de la regla.

Pero S verá que, mientras el rayo avanza, la vara con el espejo *también* lo hace, con lo que el tiempo de ida será mayor y el de vuelta menor. Si Δt es el tiempo medido en la ida y vuelta por S, podemos escribir $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, con el subíndice 1 para la ida y 2 para la vuelta.

Como se ve en el esquema superior, la luz tiene que recorrer a la ida $d = l + v\Delta t_1$. Por otro lado, dado que lo hará a velocidad c, $d = c\Delta t_1$. Igualando y despejando:

$$\Delta t_1 = \frac{l}{c - v}$$

A la vuelta en cambio recorre $d' = l - v\Delta t_2$, y de igual manera, $d' = c\Delta t_2$, con lo que

$$\Delta t_2 = \frac{l}{c + v}$$

(¡Fíjate que el análisis es el mismo que para el interferómetro, pero allí considerando el interferómetro en reposo pero con velocidades aditivas! Fíjate además que si las velocidades fueran aditivas y en la ida la luz fuera a $c + v$ y en la vuelta a $c - v$ las longitudes medidas en ambos sistemas no variarían.)

El tiempo total medido por S será:

$$\Delta t = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pero el último factor es γ^2, con lo que

$$\Delta t = \frac{2l}{c}\gamma^2$$

Como ya sabemos, los intervalos temporales se relacionan por $\Delta t = \gamma\Delta t'$. Sustituyendo en esta expresión los tiempos medidos por S y S' obtenemos que $l = \dfrac{1}{\gamma}l'$, o lo que es más habitual:

$$l = \sqrt{1 - \beta^2}\,l'$$

Dado que $\beta < 1$, ¡ S **mide que una longitud para la vara menor que la que mide** S'! Y de nuevo, lo mismo opina S' de la longitud medida por S. Las longitudes paralelas a la dirección del movimiento se ven contraídas por el observador que se considera en reposo. (Las transversales no, se puede demostrar que esto contradice los postulados, y por ello no hizo falta incluir una contracción de la longitud en el *gedankenexperiment* de los relojes de luz.). Pero esta contracción relaciona medidas entre distintos sistemas de referencia: por ello no sirve como solución a la negativa del experimento de Michelson y Morley. La contracción se da para un observador en reposo en el espacio exterior, y ni Michelson ni Morley podrían medirla pues sus reglas también estarían contraídas (¡de poder medirla sabrían que están en movimiento!). La solución al dilema es que no se puede realizar un experimento que nos asegure que somos nosotros los que nos movemos.

Y no os penséis que estos efectos son meras entelequias. **Los hemos podido comprobar montones de veces**:

- **El quizá ejemplo más conocido es el de los muones**. Los muones se producen en los rayos cósmicos, a una altitud aproximada de diez kilómetros. Su velocidad es muy alta, entorno a $0.99c$. Ocurre que su vida media es de unas dos millonésimas de segundo, por lo que multiplicado por la velocidad nos da que recorrerían una media de $650\,\mathrm{m}$ antes de desintegrarse. ¡Pero los encontramos en los laboratorios a nivel del mar! Lo que ocurre, *desde nuestra perspectiva*, es que el tiempo medido por el reloj interno del muón se ralentiza. Calculando el factor de Lorentz para esa velocidad, obtenemos que $\gamma \sim 7$, por lo que disponen de tiempo suficiente para viajar una distancia siete veces mayor, permitiendo que algunos lleguen (recuerda que la vida media es un concepto probabilístico) a la superficie y ser detectados. Por otro lado, *desde la perspectiva de los muones*, tienen todo el derecho de considerarse en reposo y sería la Tierra la que se desplaza hacia ellos a $0.99c$. En tal caso, ellos medirían la distancia desde donde se producen hasta el laboratorio 7 veces más corta, por lo que la velocidad de la Tierra basta para que les dé tiempo a ser detectados a nivel del suelo.
- **También tenemos este efecto incorporado como corrección a los GPS**,

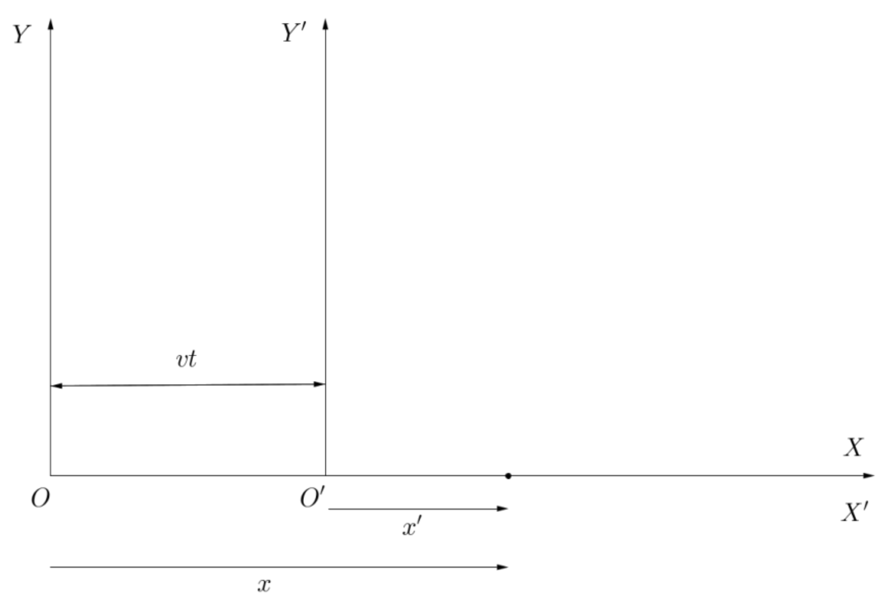
sin la cual atrasarían siete millonésimas de segundo al día. La corrección a incluir es otra, pues también contribuye que conforme más débil es el campo gravitatorio el tiempo corre más deprisa (efecto que ya tratamos aquí).

¡Y me dejo infinidad de comprobaciones que hemos tenido este último siglo!

TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

En este último apartado, veremos cómo juntar los dos efectos anteriores para obtener las **transformaciones de Lorentz**, es decir, las transformaciones **que conectan las coordenadas con las que etiquetan sucesos dos observadores en movimiento relativo uniforme**.

Supongamos dos sistemas de referencia S y S' en movimiento relativo uniforme a velocidad $\vec{v}$., tal que los orígenes coinciden cuando $t = t' = 0$.



Si S' etiqueta un punto como x' y S lo etiqueta como x, podríamos estar tentados de escribir que la relación entre ambos es:

$$x = vt + x'$$

como hicimos al ver la relatividad galineana... ¡Pero no! **Ahora somos relativistas einstenianos**, y entendemos que no podemos escribir x' alegremente, porque el observador S mide para esa distancia $x'\sqrt{1-\beta^2}$, por lo que la relación correcta es $x = vt + x'\sqrt{1-\beta^2}$. Despejando:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

¡Ya tenemos la primera de las transformaciones de Lorentz! Vayamos a por la del tiempo (fíjate que, por la disposición de los ejes, si S' etiqueta un suceso con las coordenadas y', z', S lo hará con y, z de manera que $y = y'$, $z = z'$, por lo que esas transformaciones son *triviales* -palabro que debes comenzar a incluir en tu vocabulario para leer textos de física-).

Para ello, **recordemos el principio de relatividad: S' debe usar las mismas ecuaciones para obtener las coordenadas de un suceso en S conociendo las suyas**, con la salvedad de que el mide una velocidad igual y opuesta. Por lo tanto, basta cambiar $v \to -v$, y podemos escribir:

$$x' = -vt' + x\sqrt{1-\beta^2}$$

Igualando ambas expresiones para x' (introduciendo γ para simplificar notación):

$$\gamma(x - vt) = -vt' + \frac{1}{\gamma}x$$

Queremos despejar t'. Reordenando:

$$vt' = \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)x + \gamma vt$$

Ahora vienen pasos peliagudos. Fíjate que el factor que multiplica a x en el segundo miembro se puede simplificar bastante:

$$\frac{1}{\gamma} - \gamma = \sqrt{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\gamma\beta^2$$

Ahora, como $\beta = v/c$, realmente tenemos:

$$vt' = \frac{-\frac{v^2}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} + \gamma v t$$

Pasando la velocidad dividiendo nos queda:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

Y con esta, **ya hemos deducido las transformaciones de Lorentz**.

$$\begin{aligned} x' =& \gamma\left(x - vt\right) \\ y' =& y \\ z' =& z \\ t' =& \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

Si lo has podido seguir hasta aquí, **date la enhorabuena**, porque eres capaz de deducir por ti mismo las transformaciones que fundamentan gran parte de la física fundamental que se ha hecho este último siglo. Y si tienes problemas con algún paso, no dudes en preguntar 🙂

COSITAS CURIOSAS

Antes de acabar, quiero resaltar unas cosillas interesantes de estas ecuaciones.

- El enfoque en esta entrada ha sido *intuitivo*: a través del reconocimiento de la relatividad de la simultaneidad hemos deducido la dilatación temporal y la contracción longitudinal, y de estos efectos las transformaciones de Lorentz. Pero tanto Einstein en su artículo como los libros de texto lo hacen por la vía inversa: las transformaciones de Lorentz se deducen como aquellos cambios de coordenadas que relacionan dos observadores en movimiento relativo uniforme, respetando la homogeneidad e isotropía del espacio tiempo (lo que las hace lineales) y los postulados de la relatividad especial. Una vez se tienen, de ellas es fácil deducir tanto la relatividad simultaneidad como la dilatación temporal y la contracción longitudinal. **Te**