Exercici

Diem que un sistema té la simetria d'un grup G amb operacions g_i si l'aplicació d'aquestes transformacions sobre el sistema el porta a una configuració indistingible de l'original. En mecànica quàntica representem els sistemes pel seu Hamiltonià $\mathcal{H}$ i els seus estats per les funcions d'ona Ψ_n. Aleshores succeeix que si G és el grup de simetria del sistema $g_i(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ per a qualsevol g_i.

(1) Demostra-ho (indicació: la demostració per reducció a l'absurd és prou elemental).

Voldir acò que l'Hamiltonià $\mathcal{H}$ commuta amb totes les operacions de G.

(2) Demostra-ho (indicació: és una pura comprovació).

Considera ara que G és abelià,

(3) demostra que qualsevol funció pròpia de $\mathcal{H}$ és necessàriament base d'una de les irreps de G.

Considera ara que G no és abelià i que Ψ_k és una funció pròpia no degenerada de l'Hamiltonià $\mathcal{H}$,

(4) demostra que ha de ser base d'una irrep monodimensional de G (indicació: la demostració per reducció a l'absurd és prou elemental).

Considera que G no és abelià i que l'Hamiltonià $\mathcal{H}$ té un valor propi E_n doblement degenerat i que Ψ_k, Ψ_l són dues funcions pròpies (degenerades) ortogonals associades a E_n.

(5) Demostra que han de ser base d'una irrep bidimensional de G (ajuda: recorda que si f, g formen base d'una irrep bidimensional de G, aleshores $g_i(a_1 f + a_2 g) = b_1 f + b_2 g$.

Solucions

1. Supongam que $g_i(\mathcal{H}) \neq \mathcal{H}$. Açò vol dir que el sistema està en una configuració descrita per un Hamiltonià diferent, i per tant distingible, de l'original. Aquesta conclussió va contra la hipòtesi que les transformacions de G sobre el sistema el porten a una configuració indistingible. Per tant, la hipòtesi $g_i(\mathcal{H}) \neq \mathcal{H}$ és falsa i cal que $g_i(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

2. Partim ara de que $g_i(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.
   Escrivim $[\mathcal{H}, g_i]\Psi = \mathcal{H}(g_i\Psi) - g_i(\mathcal{H}\Psi) = \mathcal{H}(g_i\Psi) - g_i(\mathcal{H})g_i(\Psi) = \mathcal{H}(g_i\Psi) - \mathcal{H}(g_i\Psi) = 0$
   que evidencia que $\mathcal{H}$ commuta amb qualsevol g_i de G.

3. Per ser G abelià tenim que per a qualsevol i i j $[g_i, g_j] = 0$. Però sabem que per a qualsevol i també $[\mathcal{H}, g_i] = 0$. En consequència el conjunt d'operadors $\{\mathcal{H}, g_1, ..., g_i, ...g_n\}$ commuten i sempre puc trobar una base $\{\Psi_n\}$ tal que $\mathcal{H}\Psi_n = E_n\Psi_n$ i també, $g_i\Psi_n = k_i\Psi_n$ per a qualsevol i. El conjunt $\{k_i\}$ són els caràcters de la irrep de G a que pertany Ψ_n.

4. En aquest cas tenim que, en general, $[g_i, g_j] \neq 0$. Partim de que $\mathcal{H}\Psi_n = E_n\Psi_n$ i que E_n és no degenerat, i.e., associat amb E_n sols hi ha Ψ_n (o una funció $N\Psi_n$, on N és una constant qualsevol). Imaginem ara que $g_i\Psi_n = F \neq k_i\Psi_n$. Apliquem g_i sobre la igualtat $\mathcal{H}\Psi_n = E_n\Psi_n$: $g_i\mathcal{H}\Psi_n = \mathcal{H}g_i\Psi_n = E_n g_i\Psi_n$. Com $g_i\Psi_n = F$ tenim que $\mathcal{H}F = E_nF$, on $F \neq k_i\Psi_n$, cosa que va contra la hipòtesi. Per tant, cal que $F = k_i\Psi_n$, cosa que evidencia que Ψ_n és base d'una irrep unidimensional amb caràcters $\{k_i\}$.

5. En aquest cas, $\mathcal{H}(a_1\Psi_k + a_2\Psi_l) = E_n(a_1\Psi_k + a_2\Psi_l)$. Ara apliquem g_i sobre aquesta igualtat: $g_i\mathcal{H}(a_1\Psi_k + a_2\Psi_l) = \mathcal{H}g_i(a_1\Psi_k + a_2\Psi_l) = E_n g_i(a_1\Psi_k + a_2\Psi_l)$. Ara be, per ser Ψ_k, Ψ_l una base associada al valor propi doblement degenerat E_n, cal que $g_i(a_1\Psi_k + a_2\Psi_l) = (b_1\Psi_k + b_2\Psi_l)$, no importa quines siguen les constants b_1, b_2. Però si per a qualsevol g_i tenim que $g_i(a_1\Psi_k + a_2\Psi_l) = (b_1\Psi_k + b_2\Psi_l)$ vol dir que aquest espai és estable sota totes les operacions de G, vol dir que formen base d'una representació bidimensional.
   Queda per demostrar que és una irrep. Si no ho fos diriem que estem enfront d'una *degeneració accidental*.