

Grup Unitari $U(n)$

Josep Planelles
Dpt. Química Física i Analítica
Universitat Jaume I

El grup $GL(n)$ de les transformacions lineals

Una transformació lineal és una funció F que té un rang i un domini que són espais vectorials.

$$\begin{aligned} F(u + v) &= F(u) + F(v) & \forall u, v \in V \\ F(\lambda v) &= \lambda F(v) & \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Exemple: $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 / F(x, y, z) = (x + 2z, -y)$

$\mathbb{F}$ serà una matriu 2×3 $\mathbb{F}_{ij} = \langle v_i^{\mathbb{R}^2} | F | v_j^{\mathbb{R}^3} \rangle$

$$\begin{aligned} F(1, 0, 0) &= F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \times 0 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{F}_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot F(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En efecte: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z \\ -y \end{pmatrix}$

En general, considerem V, W espais vectorials complexos ($\mathbb{C}$).

Si $V = W$:

$\mathbb{F}$ és una matriu quadrada.

Les transformacions $\mathbb{F}$ són automorfismes (canvis de base)

S'assegura l'existència d'inverses

Es garanteix l'estructura de grup de tots aquests canvis de base.

Anomenem $GL(n)$ a aquest grup.

Les transformacions lineals que no alteren la longitud (o norma) d'un vector s'anomenen transformacions unitàries $\mathcal{U}(n)$.

El grup $\mathcal{U}(n)$ de les transformacions lineals unitàries

$$\begin{array}{l} \mathcal{U}|u\rangle = |w\rangle \\ \langle u|\mathcal{U}^\dagger = \langle w| \end{array} \quad \rightarrow \quad \langle u|\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}|u\rangle = \langle w|w\rangle \quad \rightarrow \quad \mathcal{U}^\dagger\mathcal{U} = \mathbb{I} \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}}$$

$\mathcal{U} = e^{i\mathbb{A}}$ amb $\mathbb{A}$ hermítica ($\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}$):

En efecte: $\mathcal{U}^\dagger = e^{-i\mathbb{A}^\dagger} = e^{-i\mathbb{A}} \rightarrow \mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger = e^{i\mathbb{A}}e^{-i\mathbb{A}} = e^0 = \mathbb{I}$

El grup $\mathcal{U}(2)$ de les transformacions unitàries en 2 dimensions

$$\mathcal{U} = e^{i\mathbb{A}} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} a+b & c-id \\ c+id & a-b \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\begin{pmatrix} a+b & c-id \\ c+id & a-b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = a\mathbb{I} + b\sigma_z + c\sigma_x + d\sigma_y$$

$$\boxed{\mathcal{U} = \exp[i(a\mathbb{I} + b\sigma_z + c\sigma_x + d\sigma_y)]}$$

Si $b = c = d = 0 \rightarrow U = \exp[i A] = \exp[i a I]$

$\rightarrow U$ equival a multiplicat per la fase $\exp[i a]$

El grup $SU(2)$ unitari de fase unitat

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \text{ amb } |a|^2 + |b|^2 = 1$$

En efecte: $U^\dagger U = (|a|^2 + |b|^2) \mathbb{I}_{2 \times 2} = \mathbb{I}_{2 \times 2}$ amb $a, b \in \mathbb{C}$.

En general $SU(n)$ són exponencials de matrius hermítiques de traça zero

El subgrup de matrius reals $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ amb $a^2 + b^2 = 1$ s'anomena $SO(2)$

$$\text{Com } a^2 \leq 1 \rightarrow a = \cos \theta \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Generadors X_n del grup

Una matriu hermítica A combinació lineal d'una base: $A = \sum a_n X_n$; $a_n \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow U = \exp\left[i \sum_n a_n X_n\right]$$

$$U(a_n) = e^{i \sum_n a_n X_n} = \mathbb{I} + i \sum_n a_n X_n + \frac{1}{2!} \sum_{m,n} a_m a_n X_m X_n \dots$$

$$\rightarrow U(da_n) \approx \mathbb{I} + i \sum_n X_n da_n$$

$$\rightarrow i X_n = \left(\frac{\partial U}{\partial a_n} \right)_0$$

Els generadors són les **tangents** al grup sobre l'element neutre

Ometem la demostració de que per a qualsevol subgrup de $GL(n)$,

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum c_{\mu\nu\lambda} X_\lambda$$

Representacions lineals d' $U(n)$

Una matriu U d' $U(n)$ **també** pot ser escrita: $U = \exp\left[i \sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij}\right]$

Amb $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^*$, $(e_{kl})_{ij} = \delta_{ik} \delta_{lj}$

Els generadors e_{ij} presenten la relació de commutació: $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj}$

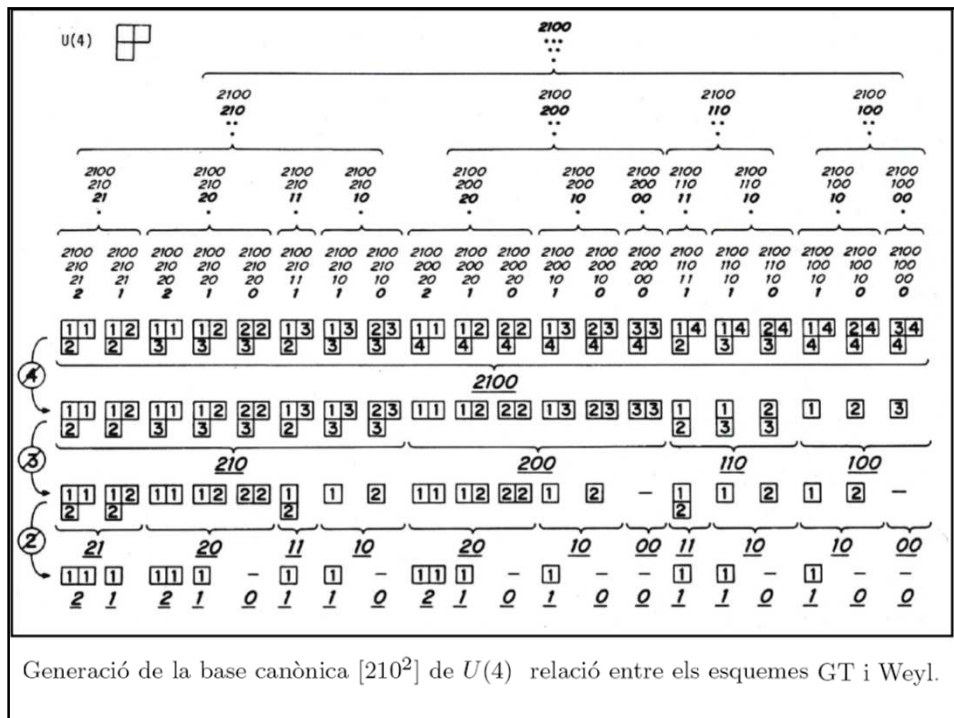
Gelfand i Tsetlin (GT):

Una irrep d' $U(n)$ ve etiquetada per $(m_{1n} \ m_{2n} \ \dots \ m_{nn})$, $m_{in} \in \mathbb{N}$

Els elements de la base per $n(n-1)/2$ enters addicionals, tals que: $m_{ij} \geq m_{i-1,j} \geq m_{i,j+1}$

$(m_{1n} \ m_{2n} \ \dots \ m_{nn})$ es pot representar per un tableau de Young on m_{ij} indica el nombre de caixes.

e.g. $(2 \ 1 \ 0 \ 0) =$

Relació etiquetes GT i Weyl (Young tableaux)

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 2 & & 1 & & 0 & & 0 \\ & 2 & & 0 & & 0 & \\ & & 2 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} (2 \ 1 \ 0 \ 0) \rightarrow [2, 1, 0^2] = [2, 1] = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ (2 \ 0 \ 0) \rightarrow [2, 0^2] = [2] = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline 4 & \end{array} \\ (2 \ 0) \rightarrow [2, 0] = [2] = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \leftrightarrow 3 \\ (1) \rightarrow [1] = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline 2 \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 4 & \end{array}$$

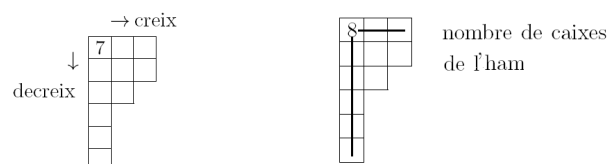
$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 4 & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 4 \\ \hline 4 & \end{array} \quad (2 \ 1 \ 0 \ 0) \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (1 \ 0 \ 0) \\ \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (1 \ 0) \\ | \quad (0) \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccccccc} 2 & & 1 & & 0 & & 0 \\ & 1 & & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & 0 & & & \end{array} \right)$$

Càlcul de la dimensió de l'irrep

dimensió de $[3^2, 2, 1^3]$ de $U(7)$

$$Num = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline 6 & 7 & 8 \\ \hline 5 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad Den = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 4 & 2 \\ \hline 7 & 3 & 1 \\ \hline 5 & 1 & \\ \hline 3 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\rightarrow D = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 = 3024$$



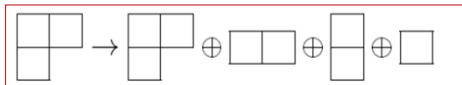
Reducció de simetria $U(n) \rightarrow U(n-1)$

(2100) de $U(4) \rightarrow U(3)$

$m_{i,j} \geq m_{i-1,j} \geq m_{i,j+1}$ permeten definir totes les segones files

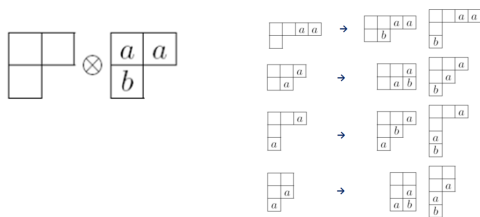
(2100) $\rightarrow$ (210) (200) (110) (100)

$$(2100) = (210) \oplus (200) \oplus (110) \oplus (100)$$



$$[20] = [8] \oplus [6] \oplus [3] \oplus [3]$$

Descomposició del producte de representacions en $U(n)$



$$[2] \otimes [2] = [4] \oplus [3] \oplus [2] \oplus [1] \oplus [1]$$

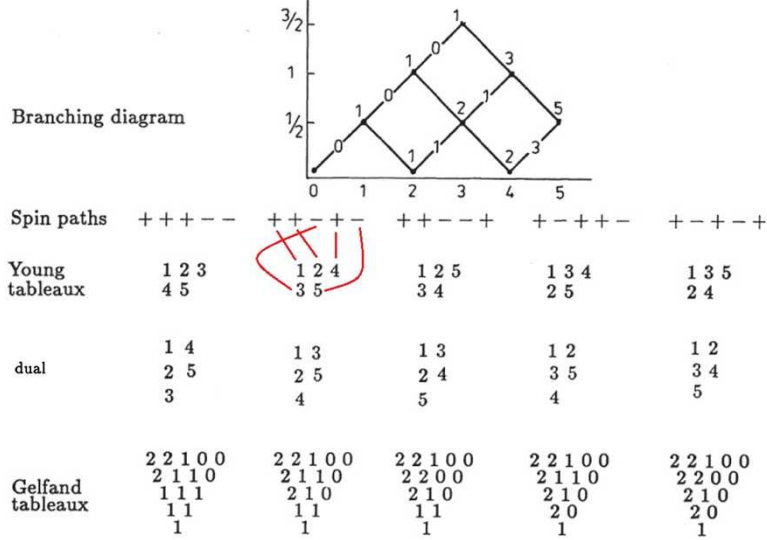
Però en $U(2)$ no poden haver tableaux de més de dues files, per tant, en $U(2)$:



$$[2] \otimes [2] = [3] \oplus [1]$$

SU(2), funcions d'espín i branching diagram

Example 1: Different representations of the 5 spin states for $N = 5$ and $S = \frac{1}{2}$.



U(n) i la part espacial de les funcions d'ona

$$\hat{H} = \sum_{i_1, i_2}^{2n} \langle i_1 | \hat{h} | i_2 \rangle \hat{a}_{i_1}^\dagger a_{i_2} + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4}^{2n} \langle i_1 i_2 | \hat{V} | i_3 i_4 \rangle \hat{a}_{i_1}^\dagger \hat{a}_{i_2}^\dagger a_{i_4} a_{i_3}$$

Definim: $e_{i_1, i_2} = \hat{a}_{i_1}^\dagger a_{i_2}$

És immediat comprovar que: $[e_{i_1, i_2}, e_{i_3, i_4}] = e_{i_1, i_4} \delta_{i_2, i_3} - e_{i_3, i_2} \delta_{i_1, i_4}$

... ergo són generadors d' $U(2n)$

Calculem les traces parcials: $\mathbb{E}_{I_1, I_2} = \sum_{\sigma} e_{I_1 \sigma, I_2 \sigma}$, $E_{\sigma_1, \sigma_2} = \sum_I e_{I \sigma_1, I \sigma_2}$

$$[\mathbb{E}_{I_1, I_2}, \mathbb{E}_{I_3, I_4}] = \mathbb{E}_{I_1, I_4} \delta_{I_2, I_3} - \mathbb{E}_{I_3, I_2} \delta_{I_1, I_4}$$

$$[E_{\sigma_1, \sigma_2}, E_{\sigma_3, \sigma_4}] = E_{\sigma_1, \sigma_4} \delta_{\sigma_2, \sigma_3} - E_{\sigma_3, \sigma_2} \delta_{\sigma_1, \sigma_4}$$

... ergo són generadors d' $U(n)$ i $U(2)$ o $SU(2)$, respectivament.

Com l'Hamiltonià no depen de les coordenades d'espín, podem integrar aquest:

$$\hat{H} = \sum_{I_1, I_2}^n \langle I_1 | \hat{h} | I_2 \rangle \mathbb{E}_{I_1, I_2} + \frac{1}{2} \sum_{I_1, I_2, I_3, I_4}^n \langle I_1 I_2 | \hat{V} | I_3 I_4 \rangle (\mathbb{E}_{I_1, I_2} \mathbb{E}_{I_3, I_4} - \delta_{I_2, I_3} \mathbb{E}_{I_1, I_4})$$

Els productes orbitals $|\Phi_{i_1, i_2, \dots, i_N}\rangle = |\phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_N}\rangle = |n_1 n_2 \dots n_n\rangle$

expandeixen l'espai n^N -dimensional de funcions N -electròniques, que descomponen com una suma d'espais adaptats a les irreps d' $U(n)$

El principi de Pauli obliga a que la funció completa (espai $\times$ espín) siga totalment antisimètrica en $U(2n)$.

caldrà que les irreps d' $U(n)$ i $SU(2)$ siguen duals.

... les irreps de $SU(2)$ tenen màxim dues files ...

... $\rightarrow$ les duals de $U(n)$ hauran de tenir màxim dues columnes.

Bases tensorials d' $U(2)$

Espai vectorial $2D$, la base: dos orbitals $\{1, 2\} = \{\alpha, \beta\}$

$\rightarrow$ base de l'irrep fonamental $\square \equiv (1, 0)$ del grup $U(2)$ $\{\square, \boxplus\} \quad \iota \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Segon potencia tensorial $\square \otimes \square = \square \oplus \boxplus$
 $[2] \otimes [2] = [3] \oplus [1]$

Base de $\square \otimes \square$ $\{\alpha\alpha, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta\beta\} = \{11, 12, 21, 22\}$

Base irrep $\square \boxplus \{\boxplus[1], \boxplus[2], \boxplus[2]\} = \iota \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Base irrep $\boxplus \quad \boxplus \equiv \iota \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Projectors S_2 $P_{\square} = e + (12) \quad \rightarrow \quad \square \rightarrow \{11, (12 + 21), 22\} \equiv \{\alpha\alpha, \alpha\beta + \beta\alpha, \beta\beta\}$
 $P_{\boxplus} = e - (12) \quad \rightarrow \quad \boxplus \rightarrow \{(12 - 21)\} \equiv \{\alpha\beta - \beta\alpha\}$

Tercera potencia tensorial

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square \oplus \square) \otimes \square = \square \square \oplus (2) \square$$

$$[2] \otimes [2] \otimes [2] = [4] \oplus (2)[2]$$

Base de $\square \otimes \square \otimes \square$ $\{111, 112, 121, 211, 221, 212, 122, 222\}$

Projectors

$$P_{\square \square} = e + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)$$

$$P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square_1 \end{smallmatrix}} = e + (12) - \frac{1}{2}(13) - \frac{1}{2}(23) - \frac{1}{2}(123) - \frac{1}{2}(132)$$

$$P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square_2 \end{smallmatrix}} = 0 + 0 - \frac{\sqrt{3}}{2}(13) + \frac{\sqrt{3}}{2}(23) + \frac{\sqrt{3}}{2}(123) - \frac{\sqrt{3}}{2}(132)$$

$$\square \square \rightarrow \{\begin{smallmatrix} \square \square \square \\ \square \square \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \square \square \\ \square \square \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \square \square \\ \square \square \square \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \square \square \square \\ \square \square \square \end{smallmatrix}\} = \{111, (112 + 121 + 211), (122 + 212 + 221), 222\}$$

$$\begin{smallmatrix} \square \square \\ \square_1 \end{smallmatrix} \rightarrow \{(2)112 - 121 - 211, (2)221 - 212 - 122\}$$

$$\begin{smallmatrix} \square \square \\ \square_2 \end{smallmatrix} \rightarrow \{121 - 211, 212 - 122\}$$

Bases tensorials d'U(3)

Espai vectorial 3D, la base: dos orbitals $\{1,2,3\}$

→ base de l'irrep fonamental $\square$ del grup U(3)

$$\{\square, \square, \square\} \circ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Segon potencia tensorial

$$\square \otimes \square = \square \oplus \square$$

$$[3] \otimes [3] = [6] \oplus [3]$$

Base de $\square \otimes \square$ $\{11, 22, 33, 12, 21, 13, 31, 23, 32\}$

Projectors S_2

$$P_{\square \square} = e + (12) \quad \square \square \rightarrow \{11, 22, 33, (12 + 21), (13 + 31), (23 + 32)\}$$

$$P_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}} = e - (12) \quad \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \rightarrow \{(12 - 21), (13 - 31), (23 - 32)\}$$

Tercera potencia tensorial

$$\square \otimes \square \otimes \square = (\square \oplus \square) \otimes \square = \square \square \oplus (2) \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} \quad etc.$$

$$[3] \otimes [3] \otimes [3] = [10] \oplus (2)[8] \oplus [1]$$

SU(3) i l'oscil·lador harmònic tridimensional

Escrivim l'hamiltonià:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=x,y,z} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \frac{m\omega^2}{2} q_i^2 \right) = \sum_{i=x,y,z} -\frac{1}{2} \nabla_{\xi_i}^2 + \frac{1}{2} \xi_i^2 = \hat{T}_{\xi} + \frac{1}{2} \xi^2$$

Tant l'operador d'energia cinètica com el d'energia potencial són invariant sota les operacions del grup O(3) de rotacions en tres dimensions → les dimensions (1,3,5,7,9,...) de les irreps d'O(3) determinaran la degeneració dels nivells d'energia.

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=x,y,z} \hat{\mathcal{H}}_i = \sum_{i=x,y,z} \left(a_i^+ a_i + \frac{1}{2} \right) \quad E = \frac{3}{2} + v_x + v_y + v_z$$

$$v_i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La degeneració resulta 1,3,6,10,15,... (?)

$$e_{ii} = a_i^+ a_i \quad \text{weight generators d'U(3)}$$

Els oscil·ladors són bosons → la funció d'ona ha de ser totalment simètrica → irreps totalment simètriques d'U(3):

$$\bullet, \square, \square\square, \square\square\square, \square\square\square\square, \dots$$

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad \dots$$

SU(3) i les partícules nuclears

En 1930 sols se coneixien dos barions: el protó i neutró, i tenen una massa molt semblant

Heisenberg (per analogia amb els estats α i β d'espín):

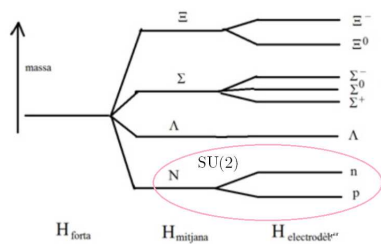
protó i neutró: dos estats amb diferent component z d'isospín.

(l'isospín no té cap relació amb l'espín, però té les mateixes relacions matemàtiques).

En absència de forces depenent de la càrrega (força electro-dèbil) l'isospín es conserva hi ha una doble degeneració (protó i neutró tenen la mateixa massa).

... Pels voltants de 1960 se troben però més partícules....

Partícula	Massa (MeV)
Ξ^-	1321.30
Ξ^0	1314.90
Σ^-	1197.41
Σ^0	1192.54
Σ^+	1189.47
Λ	1115.50
n	939.550
p	938.256



Per tant, a més de l'isospín hi havia un altre invariant (hipercarrega).

El grup de simetria → supergrup de SU(2)

SU(3)?

Octuplet de SU(3) → 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La reducció a SU(2):
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{doblet}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{triplet}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{doblet}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{singlet}}$$

En termes de tableaux de Young:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}} = 8 \quad \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}} = 2 \quad \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}} = 3 \quad \frac{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}} = 1 \quad \frac{\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}} = 2$$

D'acord amb el **model Standard** de física: barions sistemes de **tres quarks** (per això SU3)