Teorema de Noether

Josep Planelles
Dept. Química-Física i Analítica
Universitat Jaume I

4 de gener de 2022

Aquestes dies he tingut l'oportunitat d'escoltar una classe del Dr. Andrew Mitchell sobre lleis de conservació en la formulació Lagrangiana de la mecànica clàssica i he trobat especialment pedagògica la presentació que fa cap al final de la xerrada del primer teorema de Noether. Malauradament no té o no he sabut trobar apunts escrits de la presentació i he volgut rescatar per escrit la forma com presenta el primer teorema de Noether. Espere haver sigut prou fidel i no haver perdut la frescor del a seua presentació.

La reformulació d'Euler-Lagrange del les equacions de moviment de Newton de la mecànica clàssica consisteix en determinar la funció Lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ d'un sistema, la qual és funció de les coordenades q_i, velocitats $\dot{q}_i$ i el temps t, i aplicar l'equació (d'Euler-Lagrange):[1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{1}$$

Si una transformació contínua R_θ (per exemple una rotació d'angle θ al voltant d'un eix donat) que transforma les coordenades $(q_i, \dot{q}_i)$ en $(Q_i, \dot{Q}_i)$, és una operació de simetria, aleshores deixarà inalterat el sistema. Per tant, la Lagrangiana no se veurà alterada per θ, cosa que podem expressar dient: $\frac{dL}{d\theta} = 0$, que expandim:

$$0 = \frac{dL}{d\theta} = \frac{\partial L}{\partial \theta} + \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial Q_i}\frac{dQ_i}{d\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\frac{d\dot{Q}_i}{d\theta} \right\} + \frac{\partial L}{\partial t}\frac{dt}{d\theta} \tag{2}$$

El primer terme, $\frac{\partial L}{\partial \theta}$, és zero atès el paràmetre de la transformació de simetria apareix en la transformació però no en la definició d'L. El tercer terme és zero, atès que òbviament el temps no depèn del paràmetre de la transformació de simetria. Finalment, des de l'equació (1) tenim que $\frac{\partial L}{\partial Q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}$. Portant aquests resultats a l'equació (2) trobem que:

$$0 = \frac{dL}{d\theta} = \sum_i \left\{ \frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)}{dt}\frac{dQ_i}{d\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\frac{d\dot{Q}_i}{d\theta} \right\} \tag{3}$$

Ara bé,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\frac{dQ_i}{d\theta}\right) = \frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)}{dt} \cdot \frac{dQ_i}{d\theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} \cdot \frac{d\dot{Q}_i}{d\theta} \tag{4}$$

[1] La funció de Lagrange ve a ser la diferència entre l'energia cinètica i la potencial $L = T - V$, aleshores des de $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ i $V(q)$, tenim que: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}m\dot{q} = \frac{d}{dt}p$, $-\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q} = -F$, de manera que l'equació de Lagrange se converteix en la llei de Newton: $F = \frac{dp}{dt}$.

cosa que converteix l'equació (3) en:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)\left(\frac{dQ_i}{d\theta}\right) = 0, \tag{5}$$

que vol dir que $I(Q_i, \dot{Q}_i) = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i}\right)\left(\frac{dQ_i}{d\theta}\right)$ és independent del temps. És a dir, és una constant de moviment o invariant del sistema.

Si escrivim la transformació $R(\theta)$ de manera que si $\theta = 0$ aleshores $R(\theta)$ és la transformació identitat $\mathbb{I}$, com $I(Q_i, \dot{Q}_i)$ és un invariant, independentment del valor concret de θ (i per tant de $Q_i(\theta)$, $\dot{Q}_i\ (\theta)$), és convenient avaluar I en $\theta = 0$ perquè si $\theta = 0$ aleshores $Q_i = q_i$, $\dot{Q}_i = \dot{q}_i$ i podem definir l'invariant en termes de les coordenades originals no transformades:[2]

$$I(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\left(\frac{dQ_i}{d\theta}\right)_0 = \sum_i p_i \left(\frac{dQ_i}{d\theta}\right)_0 \tag{6}$$

on hem introduït la definició de moment conjugat $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Alguns exemples

Exemple 1: Considerem que la rotació al voltant de l'eix z és una operació de simetria. Aquesta transformació implica $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$, $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$, $z' = z$. Aleshores,

$$I = \left(\frac{dx'}{d\theta}\right)_0 p_x + \left(\frac{dy'}{d\theta}\right)_0 p_y + \left(\frac{dz'}{d\theta}\right)_0 p_z = -y\,p_x + x\,p_y = L_z$$

És a dir, L_z és constant de moviment.

Exemple 2: Considerem una translació $x' = x + a$, $y' = y$, $z' = z$. En aquest cas,

$$I = \left(\frac{dx'}{da}\right)_0 p_x + \left(\frac{dy'}{da}\right)_0 p_y + \left(\frac{dz'}{da}\right)_0 p_z = p_x$$

Ara la constant de moviment és el moment lineal.

[2] Atès que q_i no es funció de θ, cal usar $Q_i(\theta)$ per poder fer la derivació. Feta aquesta, calcularem el límit $\theta \to 0$ del seu valor.