

TEORIA DE GRUPOS EN QUIMICA CUANTICA  
Introducción a los grupos y las álgebras de Lie

Josep H. Planelles Fuster

## A modo de prólogo

Estos apuntes sobre la definición y primeras propiedades del grupo de Lie han tenido su origen en una de las lecciones del curso de Doctorado titulado "Teoría de Grupos en Química Cuántica" que tuve la ocasión de impartir durante el año escolar 1987/88 en el Departament de Química-Física de la Universitat de València.

El objetivo final que se persigue es el de "desmitificar" el uso de estos grupos entre los "no expertos" en matemáticas.

Es bien conocido que la aplicación de la teoría de Grupos supone una gran simplificación de muchos problemas de Física y Química. Ello ha propiciado la aparición de algunos textos básicos sobre aplicaciones de la teoría de las representaciones lineales de grupos finitos que han tenido una acogida muy favorable (entre ellos merece ser destacado el libro de Cotton "Chemical Applications of Group Theory", John Wiley and Sons, 1963).

Si bien el uso de grupos finitos es suficiente para simplificar muchos problemas en Química y en Física, a menudo nos encontramos frente a situaciones tales como el estudio de propiedades de moléculas lineales, de átomos, etc., en los que es aconsejable el uso de los grupos de la línea ( $SO(2) = C_{\infty}$ ,  $O(2) = C_{\infty v}$ ,  $D_{\infty h}$ ,...), los grupos de la esfera ( $SO(3) = K$ ,  $O(3) = K_h$ ,...), grupos de transformaciones unitarias, etc. Este tipo de grupos, llamados continuos, poseen un número de elementos infinito y unido a ello, un "manejo" distinto al de los grupos finitos.

Un tipo y otro de grupos se suelen introducir separadamente, y, dentro de la gama de los muchos textos publicados podemos decir que la introducción en Física y Química de los grupos finitos y de sus representaciones es satisfactoria y el estudiante puede encontrar una gradación en el nivel de abstracción (y por tanto de rigor matemático) que le permite viajar con comodidad partiendo de textos muy intuitivos y que presentan una gran cantidad de ejemplos sencillos de aplicación tales como el ya mencionado libro de Cotton, pasando por textos con una extensa fundamentación como el de Wigner (E. P. Wigner, Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press 1959) o el de Hamermesh (M. Hamermesh, Group Theory and its Application to Physical Problems, Addison-Wesley 1962), pudiendo alcanzar un nivel de formalización abstracta completa en libros tales como el de Serre (J. P. Serre, Representaciones Lineales de Grupos Finitos, Omega 1970).

Creemos que otro tanto no puede decirse de los grupos continuos (grupos con un número infinito no numerable de elementos:  $C_{\infty}$ ,  $C_{\infty v}$ ,  $D_{\infty h}$ ,  $K$ ,  $K_h$ ,...). Quizás ello sea debido a su mayor complejidad. De hecho nos encontramos frente a autores que únicamente consideran el estudio de subgrupos de la esfera ( $C_{\infty}$ ,  $C_{\infty v}$ ,  $D_{\infty h}$ ,  $K$ ,...),

presentándolos como una generalización de los grupos finitos donde se cambian sumas por integrales. Quizás ésto sea un buen punto de arranque para que el estudiante de Física y de Química manipule por primera vez estos grupos. En cualquier caso es constatable que incluso textos como Hamermesh (ya mencionado), Joshi (A. W. Joshi, Elements of Group Theory for Physicists, Wiley Eastern Limited 1977), Chisholm (C. D. H. Chisholm, Group Theoretical Techniques in Quantum Chemistry, Academic Press 1976), Lichtenberg (D. B. Lichtenberg, Unitary Symmetry and Elementary Particles, Academic Press 1978) etc., que estudian con cierto detalles los grupos continuos, no prestan demasiada atención ni a su definición formal ni tampoco a la introducción del álgebra de Lie. En su lectura el "no experto" se encuentra a veces realizando la operación sumar (+) elementos de un grupo multiplicativo  $\{G, *\}$  sin que se le haya definido con suficiente detalle esta operación, o generando elementos de dicho grupo a partir de un álgebra cuya introducción le resulta un tanto arbitraria y cuya relación con el grupo, poco natural.

Estos apuntes pretenden realizar una introducción intuitiva al grupo abstracto de Lie y a su álgebra con la ayuda visual de la geometría, haciendo cierto énfasis, en particular, en que la relación que existe entre una superficie en el espacio real tridimensional y cualquiera de sus planos tangentes es imagen de la relación que existe entre un grupo de Lie y su álgebra.

Quiero expresar aquí mi agradecimiento a mis colegas del Col·legi Universitari de Castelló, especialmente al Dr. Juan Monterde, del Departamento de Geometría y Topología, así como al Dr. José Antonio López, del Departamento de Mecánica y Astronomía, por las muchas y muy útiles discusiones que han sido cruciales para la elaboración de estos apuntes. Finalmente, quiero reseñar algunos libros que me han sido útiles para estudiar este tema:

R. Abraham y J.E. Marsden, Foundations of Mechanics, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1978; Cap 1 y 4.

N.J. Hicks, Notas sobre Geometría Diferencial, Ed. HispanoEuropea, 1974. Los ejemplos propuestos son de gran interés.

S. Kobayashi y K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol 1, Interscience Publishers (John Wiley and Sons) 1963; Cap 1.

M. Spivak, Cálculo en Variedades, Reverté, 1972. Presenta un enfoque clásico del cálculo de variedades. Resulta de lectura fácil.

G. Hochschild, La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968. Su lectura requiere de una serie de conocimientos previos. Es fundamentalmente útil como libro de consulta puntual.

y por supuesto todos los libros de aplicaciones de teoría de grupos reseñados más arriba.

## Grupos topológicos

Comencemos considerando un ejemplo. Sea el grupo continuo  $G = SO(2)$  de rotaciones alrededor de un eje. Hablamos de sus elementos como rotaciones de ángulo  $\theta$ . Al hacerlo, implícitamente establecemos una correspondencia entre los elementos  $g \in G$  del grupo y cierto parámetro  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Asimismo, al referirnos a los elementos del grupo intuimos unas relaciones de proximidad en el sentido de pensar que dos rotaciones  $g(25.0^\circ)$  y  $g(25.1^\circ)$  están más "próximas" que otras dos, p. ej.  $g(25.0^\circ)$  y  $g(50.0^\circ)$ . A primera vista esta noción de proximidad parece "heredada" de aquella relación de proximidad existente en  $\mathbb{R}$  donde están definidos los valores del parámetro  $\theta$ . Sin embargo, el hecho de que identifiquemos las rotaciones  $g(0) = g(2\pi)$  o en general  $g(\theta) = g(\theta + 2k\pi)$  nos hace pensar que ello no es exactamente cierto.

Notemos que la identificación efectuada induce una relación de equivalencia en  $\mathbb{R}$ , que puede expresarse por  $\theta \sim \theta + 2k\pi$ . El conjunto cociente  $\mathbb{R}/\sim$  de las clases de equivalencia de  $\mathbb{R}$  por la relación  $\sim$ , admite como representantes de clase a los elementos del intervalo  $[0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$  pero definiendo entre ellos unas nuevas relaciones de vecindad que podrían quedar reflejadas mediante una circunferencia. Podemos verlo gráficamente en la figura 1.

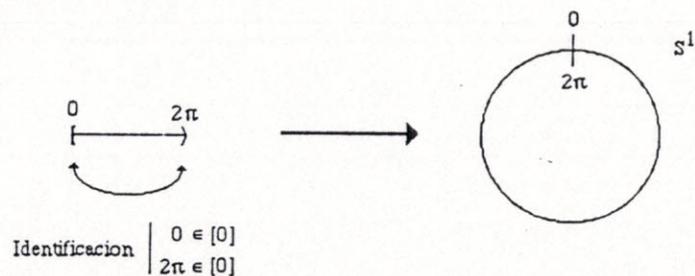


Figura 1.- Definición topológica de circunferencia.

De hecho, debe indicarse que ésta es una definición de circunferencia alternativa a la definición más tradicional  $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2\}$ . Así pues vemos que desde un punto de vista de las relaciones de proximidad, los elementos de  $SO(2)$  forman una

circunferencia puesto que sus elementos pueden también tomarse como los representantes de clase del conjunto cociente  $\mathbb{R}/\sim$ <sup>(1)</sup>.

Podemos concluir diciendo que  $SO(2)$  es una colección de elementos con una ley de composición interna que le dota de estructura de grupo pero que a la vez entre sus elementos hemos definido unas relaciones de vecindad que nos obliga a contemplarlos como formando una circunferencia. Este tipo de conjuntos que poseen simultáneamente una estructura de grupo y una estructura de espacio topológico se denominan grupos topológicos<sup>(2)</sup>.

Nos preguntamos ahora si es necesario acudir a  $\mathbb{R}^2$  (donde se halla inmersa la circunferencia) para poder hablar de las relaciones de proximidad del grupo  $SO(2)$ . La respuesta, a nivel local, es negativa. Veamos que se quiere expresar con ello. Consideremos por ejemplo dos intervalos abiertos de  $\mathbb{R}$  i.e.  $(-\pi, \pi)$  y  $(0, 2\pi)$ . Establezcamos la correspondencia  $\theta \rightarrow R(\theta)$  para cada intervalo por separado. Podemos constatar que, restringidos a considerar a la vez un solo intervalo, las relaciones de vecindad entre los elementos de  $SO(2)$  que se corresponden con puntos de un intervalo y aquellas que existen entre dichos puntos (topología de la recta real  $\mathbb{R}$ ) son coincidentes. Así pues, localmente, podemos decir que  $SO(2)$  tiene las mismas relaciones de vecindad que los intervalos de  $\mathbb{R}$  con los que se ha establecido correspondencia.



Figura 2a. Mapa del mundo centrado sobre el océano atlántico.

<sup>1</sup>  $SO(2)$  y  $S^1$  son dos espacios topológicos equivalentes, ésto es, homeomorfos.

<sup>2</sup> Se verá más adelante que se impone una compatibilidad entre las operaciones del grupo y la estructura de espacio topológico en la definición de grupo topológico.



Figura 2b. Mapa del mundo centrado en el océano pacífico.

La afirmación de que  $SO(2)$  tiene las mismas relaciones de vecindad que los intervalos de  $\mathbb{R}$  con los que se ha establecido correspondencia debe considerarse con cuidado en el siguiente sentido. Consideremos los mapas del mundo de la figura 2. Es conocido que, siguiendo el correspondiente paralelo, Alaska y Siberia están separadas tan solo por una corta distancia (distancia correspondiente al estrecho de Bering). Esto queda reflejado perfectamente en el mapa de la figura 2b. Sin embargo es posible, siguiendo el mismo paralelo, hacer un largo camino desde Alaska hasta Siberia como muy bien queda reflejado en el mapa de la figura 2a. Debe indicarse que ambas descripciones de las relaciones de vecindad entre Alaska y Siberia no son contradictorias. Asimismo debe indicarse que constatamos la necesidad de más de un mapa para poder tener una descripción completa de las relaciones de vecindad en el mundo.

Volvamos sobre  $SO(2)$  y analicemos las relaciones de proximidad entre  $R(\theta=\epsilon)$  y  $R(\theta=2\pi-\epsilon)$ . Consideremos para ello el esquema de la Figura 3 donde  $F_1$  representa la biyección entre el abierto  $U_1 = \{R(\theta=-\pi), R(\theta=\pi)\} \subset SO(2)$  y el abierto  $V_1 = (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$ . Análogamente,  $F_2$  representa la biyección entre el abierto  $U_2 = \{R(\theta=\epsilon), R(\theta=2\pi-\epsilon)\} \subset SO(2)$  y el abierto  $V_2 = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ . A cada conjunto  $(U_i, F_i)$  se le denomina carta local de  $SO(2)$  y tiene el sentido de que en su imagen sobre  $\mathbb{R}$ ,  $V_i$ , se pueden encontrar todas las relaciones de vecindad de  $U_i$  (del mismo modo que quedan

reflejadas las distancias entre ciudades en el mapa donde se representan carreteras).

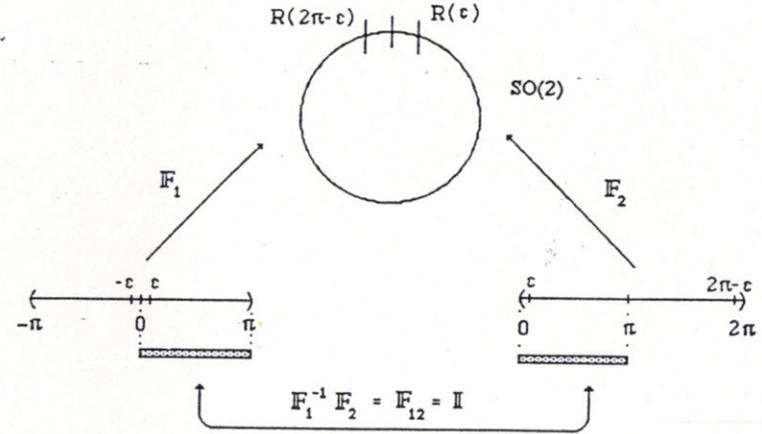


Figura 3.- Descripción de  $SO(2)$  mediante dos cartas compatibles.

Notemos asimismo que existe una biyección entre aquellas partes de  $V_1$  y  $V_2$  cuya imagen en  $SO(2)$  es la misma. En el ejemplo desarrollado en la Figura 3 resulta ser que  $F_{12} = \text{Id}$ . Ello no siempre ha de ser así. Veremos más tarde otro ejemplo de cartas de  $SO(2)$  donde  $F_{12}$  no es la identidad (basta disponer de dos mapas con distinta escala para que  $F_{12}$  haya de ser necesariamente distinto de la identidad).

A partir de la Figura 3 constatamos que  $R(\theta=\epsilon)$  y  $R(\theta=2\pi-\epsilon)$  quedan descritas como muy distantes según la carta  $(F_2, U_2)$ . Esta descripción se corresponde con dar la vuelta a casi toda la circunferencia. Sin embargo, por el hecho de que  $2\pi-\epsilon$  pertenece a la misma clase que  $-\epsilon$  (es decir  $R(\theta=\epsilon)$  y  $R(\theta=2\pi-\epsilon)$  son la misma rotación) y tomando la carta  $(F_1, U_1)$  diremos que la vecindad entre estas dos rotaciones es la misma que existe entre  $\epsilon$  y  $-\epsilon$  sobre el intervalo  $V_1 = (-\pi, \pi)$ .

Consideremos ahora el ejemplo de la figura 4. En este caso la biyección se establece también entre aquellas partes de los intervalos de  $\mathbb{R}$  cuyas imágenes en  $SO(2)$  son las mismas y el isomorfismo no es trivial:  $H_{12} = 2\theta - 4\pi: (2\pi, 2\pi+\pi/2) \leftrightarrow (0, \pi)$ .

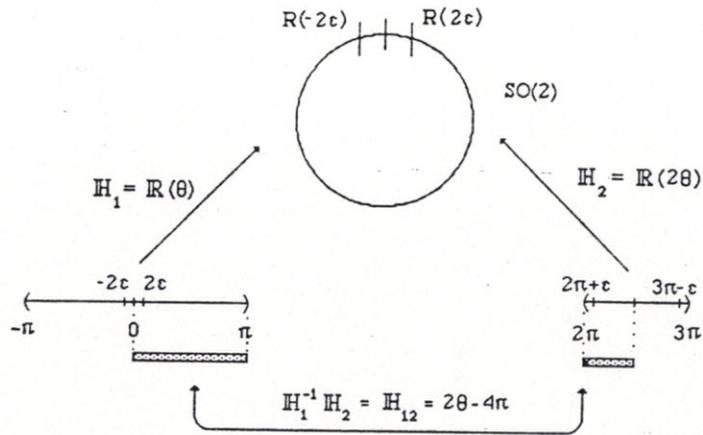


Figura 4.- Otras dos posibles cartas de  $SO(2)$ .

Con objeto de asegurar que aquellas partes de  $SO(2)$  que pudieran aparecer en más de una carta sean descritas de igual manera en todas ellas, impondremos a la biyección  $F_{12}$  la continuidad e incluso la diferenciabilidad. (Es fácil ver que la correspondencia entre dos mapas a distinta escala de un mismo territorio es un isomorfismo continuo y diferenciable).

En un intento de generalizar los ejemplos discutidos diremos que **dado un grupo contínuo  $G$  podemos describir su topología** (sus relaciones de vecindad) mediante el **establecimiento de cartas compatibles**. Para ello cubriremos  $G$  mediante una colección de subconjuntos abiertos suyos  $U_i$  y estableceremos biyecciones entre estos subconjuntos  $U_i \subset G$  y ciertos subconjuntos abiertos  $V_i$  de  $\mathbb{R}^n$ , con la restricción de que si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , esto es, se produce un solapamiento de cartas, sea posible contruir una biyección  $F_{ij} = F_i(U_i \cap U_j) \leftrightarrow F_j(U_i \cap U_j)$  construida según  $F_{ij} = F_i^{-1}F_j$  que sea continua y diferenciable de modo que se asegure la compatibilidad de cartas. En la figura 5 presentamos un esquema correspondiente a esta definición.

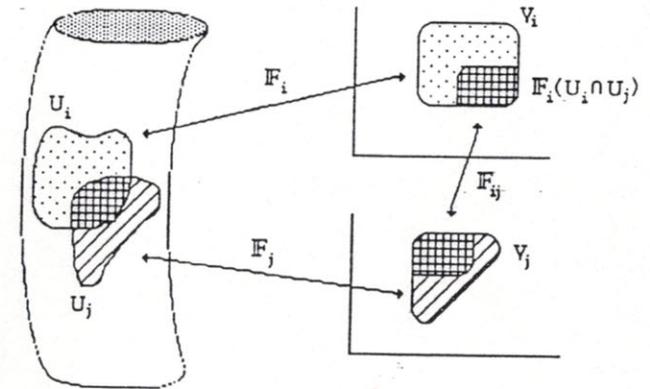


Figura 5.- Cartas de un espacio topológico sobre abiertos de  $\mathbb{R}^2$ .

Una vez establecidas las cartas podemos expresar fácilmente las relaciones de vecindad en el grupo en base a las imágenes de las cartas en  $\mathbb{R}^n$  (del mismo modo que mirando un mapa de carreteras concluimos la mayor o menor proximidad entre distintas ciudades).

Al conjunto de cartas  $(F_i, U_i)$  que cubren  $G$  se les llama **atlas  $\mathcal{A}$  de  $G$** . Podemos establecer la relación de equivalencia entre atlas:  $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2 \leftrightarrow \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$  es un atlas. (Es decir, si dados dos atlas  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  no existe ninguna incompatibilidad entre cualesquiera dos cartas de ambos atlas y puesto que cada uno de los dos atlas cubre por sí solo todo  $G$ , se tendrá que su unión deberá ser también un atlas de  $G$ ). Por último dos definiciones:

Llamaremos **estructura diferenciable  $\mathcal{J}$  de  $G$**  a una clase de equivalencia de atlas de  $G$ .

Llamaremos **variedad diferenciable  $M$  de  $G$**  al par  $(G, \mathcal{J})$ .

## Continuidad

Dado un atlas  $\mathcal{U}$  correspondiente a un conjunto  $G$  podemos dar la siguiente definición de entorno de un elemento  $g \in G$  que nos va a ser útil en la definición de continuidad.

Sea  $U \subset G$ , se dice que  $U$  es un entorno de  $g \in G$  si  $g \in U$  y para toda carta  $\mathbb{F}_i: V_i \leftrightarrow U_i$  tal que  $g \in U_i$  se tiene que  $\mathbb{F}_i^{-1}(U_i \cap U)$  sea un entorno de  $r = \mathbb{F}_i^{-1}(g)$ .

Como vemos esta definición no hace más que trasladar a  $G$  las relaciones de vecindad de sus imágenes en  $\mathbb{R}^n$ .

Volvamos sobre los grupos continuos y preguntémosnos que propiedades se inducen por la topología en la operación del grupo ( $*$ ) y en la inversión. Para ello comencemos por describir estas operaciones:

$$\begin{aligned} \text{-Operación } *: \quad G \times G &\rightarrow G \\ (a,b) &\rightarrow *(a,b) = a * b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{-Operación inversión } i: \quad G &\rightarrow G \\ a &\rightarrow i(a) = a^{-1} \end{aligned}$$

La consideración en  $G$  de relaciones de vecindad a partir de las imágenes de sus cartas en abiertos de  $\mathbb{R}^n$  nos ha permitido más arriba establecer, de modo sencillo, la definición de entornos de  $G$ . Este concepto nos va a permitir hablar de continuidad de funciones de  $G$ . Definimos la continuidad de la inversión  $i$ :

$i: G \rightarrow G$  es continua en  $g \in G$  si  $\forall U \subset G$  entorno de  $a^{-1}$  se tiene que  $i^{-1}(U)$  sea un entorno de  $a$ . En tal caso y puesto que  $i$  es una biyección diremos que  $i$  es una función homeomorfa.

Análogamente, se define la continuidad de la operación  $*$  del grupo:

$*$ :  $G \times G \rightarrow G$  es continua en  $(g_1, g_2) \in G \times G$  si  $\forall U \subset G$  entorno de  $*(g_1, g_2) = g_1 * g_2$   $\exists W$ , entorno de  $(g_1, g_2) \in G \times G$ , de modo que  $U = *(W)$ .

Finalmente, y con objeto de fijar ideas, vamos a recordar la definición los conceptos de espacio topológico y de grupo topológico: Un conjunto  $G$  con una colección de subconjuntos  $\mathcal{O}$  que llamaremos abiertos de  $G$ , que cumplan:

1.  $\emptyset \in \mathcal{O}, G \in \mathcal{O}$ .
2. si  $U_1, U_2 \subset \mathcal{O} \rightarrow U_1 \cap U_2 \subset \mathcal{O}$ .
3. si  $U_1, U_2 \subset \mathcal{O} \rightarrow U_1 \cup U_2 \subset \mathcal{O}$ .

constituye un espacio topológico. Si además todo par de elementos de  $G$  pueden ser separados en abiertos disjuntos, el espacio topológico se llama de Hausdorff.

Con todas las consideraciones y definiciones previas podemos definir ya de modo inambiguo el concepto de grupo topológico: Un grupo topológico es a la vez un espacio topológico Hausdorff y un grupo siendo continuas la inversión y la operación del grupo.

## Conexión en grupos topológicos

La idea de conexión viene ligada a la posibilidad de unir dos puntos cualesquiera de un conjunto mediante un camino totalmente contenido en dicho conjunto. En un conjunto inconexo ello sería imposible y es por ello que imaginamos los conjuntos inconexos como una colección de piezas disjuntas. La figura 6 nos resume esta idea de modo gráfico.



Figura 6.- Conjuntos conexos e inconexos.

Con mayor precisión diremos que dado un conjunto conexo no existe ninguna aplicación continua desde dicho conjunto sobre un espacio discreto (por ejemplo  $\mathbb{Z}$ ) que contenga más de un punto en la imagen. O sea, que toda función continua  $f: G \rightarrow \mathbb{Z}$  es la función constante. Por el contrario, diremos que  $G$  es inconexo si  $\exists$  alguna  $f: G \rightarrow \mathbb{Z}$  que tenga más de un punto por imagen. Por ejemplo consideremos  $O(2)$ , grupo ortogonal en dos dimensiones, y sea la función determinante, la cual en este ejemplo tiene dos puntos por imagen:  $\text{Det}: O(2) \rightarrow \{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$ . Tenemos pues que  $O(2)$  es inconexo constando de dos subconjuntos disjuntos y conexos: las rotaciones impropias de determinante  $+1$  que conjuntamente, con la operación de multiplicar de  $O(2)$ , constituyen el grupo  $SO(2)$ , y las rotaciones impropias, de determinante  $-1$ , que no presentan estructura de grupo por el hecho de no contener a la matriz unidad (elemento neutro).

Demonos cuenta que para definir un elemento de  $O(2)$  basta con asignar un valor al parámetro continuo  $\theta$  (ángulo de rotación) e indicar si se trata de una rotación propia ( $+1$ ) o impropia ( $-1$ ). Así pues tenemos que existen grupos topológicos inconexos que constan de  $n$  piezas disjuntas (cada una de ellas conexa) etiquetables mediante  $n$  valores de parámetros discretos y cuyas operaciones se definen con el concurso de dichos

parámetros discretos más el concurso adicional de parámetros continuos.

Debemos indicar por último que existen grupos topológicos doblemente (multiplemente) conexos. Diremos que un conjunto  $G$  es doblemente conexo si dados dos puntos cualesquiera  $a$  y  $b \in G$ , siempre es posible encontrar dos caminos distintos (totalmente contenidos en  $G$ ) que los unan, no siendo posible identificar uno y otro camino mediante una deformación continua. Veamos ésto con más detalle: Definimos dos caminos cualesquiera  $C_1$  y  $C_2$  que unen a y  $b \in G$  según:

$$C_1: [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow G / C_1(0) = a, C_1(1) = b; \text{ siendo } C_1 \text{ continua.}$$

$$C_2: [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow G / C_2(0) = a, C_2(1) = b; \text{ siendo } C_2 \text{ continua.}$$

Supongamos que  $G$  es simplemente conexo.

Tenemos que  $\forall C_1, C_2: [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow G, \exists F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G / F$  es continua y cumple que  $F(x, 0) = C_1(x)$  y  $F(x, 1) = C_2(x) \forall x \in G$ .

Por el contrario si  $G$  es doblemente conexo es imposible, por definición, la construcción de  $F$ .

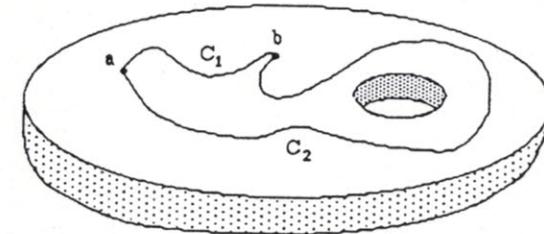


Figura 7.- Conjunto doblemente conexo.

En la figura 7 se muestra un espacio doblemente conexo. Mediante una deformación continua no se puede convertir  $C_2$  en  $C_1$  a no ser que haga desaparecer el agujero. Este puede empuñarse continuamente tanto cuanto se quiera pero su eliminación es una operación discreta.

El concepto de  $m$ -conexión de un grupo va estrechamente relacionado con la existencia de representaciones irreducibles  $m$ -evaluadas de dicho grupo. Esto presenta interés, por ejemplo, porque permite incluir a las funciones de spin como base de representaciones irreducibles en grupos de transformaciones definidas sobre espacios

vectoriales cuyo cuerpo de escalares es real. Son ejemplos de grupos múltiplemente conexos  $SO(2)$ ,  $SO(3)$ , etc. (ver por ejemplo Hamermesh p. 321).

## Grupos de Lie

Además de imponer la continuidad en la inversión y en la multiplicación ( $*$ ) de un grupo, lo cual nos lleva a la definición de grupo topológico, es posible imponer restricciones adicionales a estas operaciones que nos permiten definir un nuevo tipo de estructura: el grupo de Lie. Diremos que un grupo  $G$  es de Lie si  $*$  y la inversión son diferenciables en cualquier elemento de  $G$ .

Tengamos presente que hablar de diferenciable en un punto implica tener que definir previamente el espacio vectorial tangente al grupo en dicho punto. Veamos que se quiere decir y para ello recordemos, a modo de ejemplo, la definición de diferenciable de funciones reales de variable vectorial:

Se dice que  $f: S_r^2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_m \subset \mathbb{R}$  es diferenciable en  $x_0 \in S_r^2$  si  $\exists g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lineal así como  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  infinitesimal de modo que  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = g(\Delta x) + \|\Delta x\| h(\Delta x)$ .

Debemos resaltar que en la definición de diferenciable de  $f$  en el punto  $x_0$ , tanto  $g$  como  $h$  son aplicaciones que se definen desde el llamado espacio tangente a la función en  $x_0$  (en este caso dicho espacio tangente se llama plano tangente y es simplemente  $\mathbb{R}^2$ ).

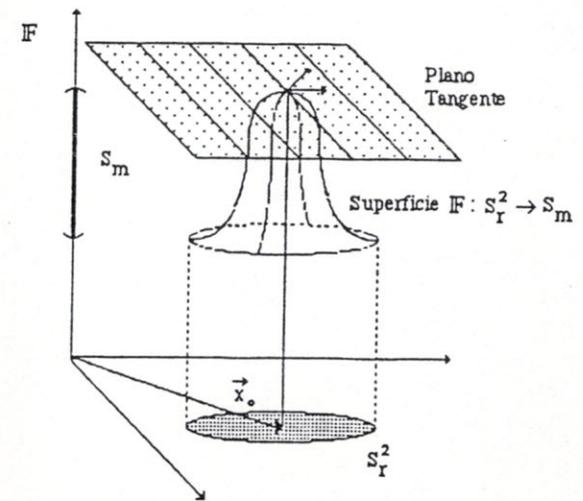


Figura 8.- Superficie diferenciable.

Además insistir en que en nuestro ejemplo ha sido posible establecer esta definición merced a que sabemos que nuestra función  $f$  está inmersa en  $\mathbb{R}^3$  y como consecuencia los planos tangentes son como  $\mathbb{R}^2$ . Asimismo queremos hacer notar que una superficie diferenciable pudiera coincidir sólo en un punto con su plano tangente. (Con esto queremos poner de relevancia que la definición del espacio tangente no es siempre trivial). Gráficamente podemos verlo en la figura 8.

En resumen, dado un grupo  $G$  y una estructura diferenciable  $\mathcal{J}$  se dispone de una variedad diferenciable  $M = (G, \mathcal{J})$ . Ahora bien para poder realizar la diferenciación debemos asociar a cada punto de  $M$  un espacio vectorial: el espacio tangente, hiperplano tangente o simplemente plano tangente a la variedad en dicho punto.

Así pues, será necesario realizar una definición del espacio tangente antes de poder hablar de diferenciable.

Como paso previo hacia la definición del plano tangente definiremos el concepto de curvas diferenciables en el grupo  $G$ .

## Curvas diferenciales en un grupo topológico $G$

Si bien lo que sigue es general para variedades nos referiremos siempre a grupos topológicos.

Sea  $G$  un grupo topológico. Llamamos curva de  $G$  a toda aplicación continua

$$\alpha: (a,b) \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset G.$$

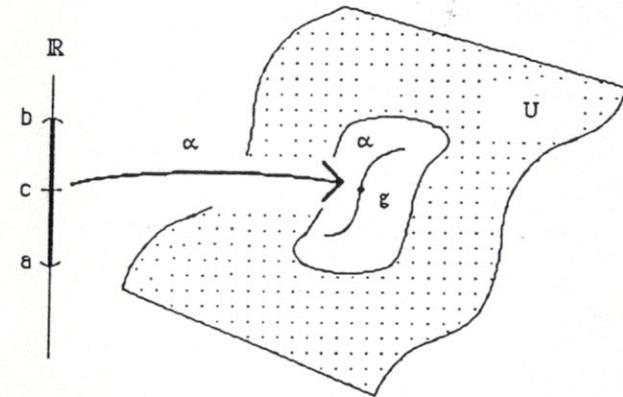


Figura 9.- Curva en el grupo  $G$

La figura 9 ayuda a visualizar el concepto de curva de  $G$  como derivado de la idea intuitiva de construcción de trayectorias o caminos sobre  $G$ . Entre los diversos caminos de  $G$  existen un conjunto de ellos que no presentan brusquedades. Esta idea intuitiva de "caminos suaves" sobre subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  es lo que ha originado el concepto de diferenciable en  $\mathbb{R}^n$ . Vamos a trasladar dicho concepto desde  $\mathbb{R}^n$  a los grupos topológicos. Para ello tomemos una carta  $(U, \rho)$  de  $G$  y un elemento  $g \in U \subset G$  que sea imagen de  $c \in (a,b) \subset \mathbb{R}$  mediante  $\rho$ . Diremos que la curva  $\alpha: (a,b) \rightarrow U$  es diferenciable en  $c$ , donde adquiere un valor  $g = \alpha(c)$ , si  $\exists \alpha: (a,b) \subset \mathbb{R} \rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^n$  diferenciable en  $p = \alpha(c)$ , siendo  $\alpha$  definida por la composición de aplicaciones  $\rho \circ \alpha$ <sup>(1)</sup>.

<sup>1</sup>La compatibilidad entre cartas de un grupo topológico asegura, en particular, que si una curva es diferenciable en una carta  $(V_1, \rho_1)$  lo sea en cualquier carta  $(V_i, \rho_i)$ .

Démonos cuenta que esta primera definición de diferenciabilidad de curvas de  $G$  se resume simplemente en llamar diferenciable a aquella curva de  $G$  cuya imagen en  $\mathbb{R}^n$  (según la correspondiente carta de  $G$ ) sea diferenciable.

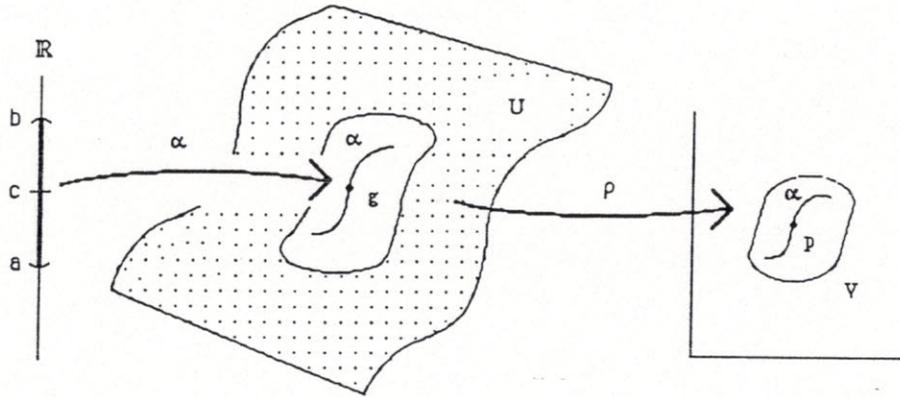


Figura 10.- Curva diferenciable de  $G$

Vamos a aprovechar este modo de transferencia de conceptos, via la composición  $\alpha = \rho \circ \alpha$ , desde  $\mathbb{R}^n$  a los grupos topológicos y vamos a precisar el concepto de tangencia entre curvas de  $G$  (Todo ello en aras a la construcción del espacio tangente a un grupo topológico que es nuestro último objetivo).

Sea  $(U, \rho)$  una carta de  $G$ ; sea  $g \in U \subset G$ ; sea  $c \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ ; sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos curvas diferenciables de  $G$  que se cruzan en  $g$ , o sea tal que  $\alpha(c) = \beta(c) = g \in G$ . Diremos que  $\alpha$  y  $\beta$  son tangentes en  $g$  si y sólo si  $\alpha = \rho \circ \alpha$ ,  $\beta = \rho \circ \beta$  son tangentes en  $c$ <sup>(2)</sup>.

(En el apéndice 1 se recuerda brevemente la condición de tangencia entre curvas de  $\mathbb{R}^2$ ).

<sup>2</sup>La compatibilidad entre cartas de un grupo topológico asegura, en particular, que si dos curvas son tangentes en una carta  $(V_1, \rho_1)$  lo sean en cualquier carta  $(V_i, \rho_i)$ .

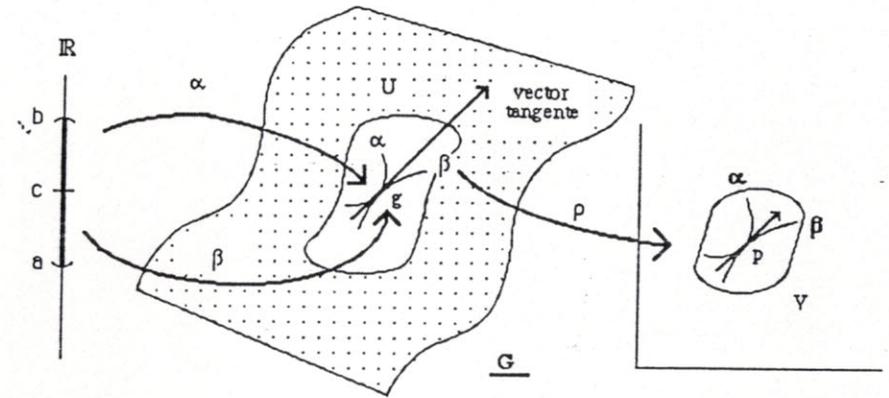


Figura 11.- Curvas tangentes en  $G$ .

Démonos cuenta que la relación de tangencia entre curvas diferenciables de  $G$  es de equivalencia. Dicha relación la expresamos del siguiente modo (ver figura 11):

$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha$  y  $\beta$  presentan igual vector tangente en  $p$ , imagen de  $c$  en la carta  $(U, \rho)$  de  $G$ .

Esta relación de equivalencia permite definir clases de equivalencia  $[\alpha]$  en  $G$  que engloban a todas aquellas curvas diferenciables  $\alpha$ , cuyas imágenes  $\alpha$  en  $\mathbb{R}^n$  presentan idéntico vector tangente en  $p$ . Fijémonos que existe una correspondencia biunívoca entre vectores tangentes cuyo origen es  $p$  en  $\mathbb{R}^n$  y las clases de equivalencia  $[\alpha]$  de  $G$ . En la figura 11 hemos representado las clases de equivalencia que engloba a las curvas diferenciables  $\alpha$  y  $\beta$  mediante una flecha que hemos llamado vector tangente. Es pues intuitivo realizar la siguiente definición:

Llamamos vector tangente a la curva diferenciable  $\alpha$  en el punto  $g \in G$  a la clase de equivalencia  $[\alpha]$  a la cual pertenece.

Por último definiremos el espacio tangente a  $G$  en  $g$ ,  $T_g G$ , como la unión de todos los vectores tangentes a todas las curvas diferenciables de  $G$  en el punto  $g \in G$ , o sea el conjunto de clases de equivalencia de curvas diferenciables en  $g$ :  $T_g G = \{ [c]_g / c \text{ curva diferenciable de } G \text{ en } g \}$ .

## Proyección del haz de tangentes

Existe la idea intuitiva de que toda superficie ( $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ) se encuentra "inmersa" en la unión de sus espacios tangentes. Podemos trasladar esta idea a espacios abstractos mediante las dos definiciones siguientes:

-Llamamos haz de tangentes de  $G$ :  $TG = \bigcup_{g \in G} T_g(G)$  (a la unión de sus tangentes)

-Llamamos proyección del haz de tangentes de  $G$  a la aplicación  $\tau_G: TG \rightarrow G$  definida por la relación  $\tau_G([c]_g) = g$ .

Llegados a este punto no debemos perder de vista que, en realidad, lo único que por el momento hemos hecho ha sido definir un conjunto al que hemos llamado espacio tangente. Ello ha sido realizado mediante la descripción de sus elementos, los vectores tangentes, pero en ningún momento hemos dicho nada acerca de su estructura (esto es, no hemos definido, p. ej., la operación suma de clases de equivalencia y en base a ello hemos descrito unas relaciones estructurales entre sus elementos). Asimismo, debemos indicar que cuando hablamos de planos tangentes a superficies sumergidas en  $\mathbb{R}^3$ , dichos planos son isomorfos a  $\mathbb{R}^2$  y consideramos en ellos la estructura de  $\mathbb{R}^2$ , pero si se tiene un grupo topológico cualquiera no es trivial la realización de identificaciones de los espacios tangentes y conjuntos conocidos por lo que la siguiente etapa a cubrir en nuestro desarrollo será la estructuración del espacio tangente. Vamos a ver como fácilmente podrá dotarse de estructura de álgebra.

## Estructuración del espacio tangente

Vamos a definir las operaciones internas  $+$ ,  $[\ ]$  y la operación externa  $(\cdot)$  y se deja como ejercicio la comprobación de que con estas operaciones el espacio tangente presenta estructura de álgebra.

**Operación suma:** Sea  $(U_i, \rho_i)$  una carta de  $G$  centrada en  $g$ , o sea tal que  $(0,0,\dots) \in \mathbb{V}_i$  y  $\rho_i(0,0,\dots) = g$ . Sean  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  dos vectores tangente en  $g$ . Tenemos que  $\exists \alpha = \rho_i^{-1} \cdot \alpha \in \mathbb{V}_i \subset \mathbb{R}^n$  y  $\beta = \rho_i^{-1} \cdot \beta \in \mathbb{V}_i \subset \mathbb{R}^n$  y por lo tanto  $\exists \gamma = \alpha + \beta \in \mathbb{V}_j \subset \mathbb{R}^n$  (siendo  $+$  la suma en  $\mathbb{R}^n$ ). Sea otra carta de  $G$   $(U_j, \rho_j)$  centrada en  $g$ , o sea tal que  $(0,0,\dots) \in \mathbb{V}_j$  y  $\rho_j(0,0,\dots) = g$ , entonces  $\exists \gamma \in G / \gamma = \rho_j^{-1} \cdot \gamma$

Con todo ello definimos la suma de vectores tangentes según:

$$[\alpha] + [\beta] = [\gamma] = [\rho_j^{-1}(\rho_i \cdot \alpha + \rho_i \cdot \beta)]$$

En la figura 12 se ilustra de modo gráfico esta definición.

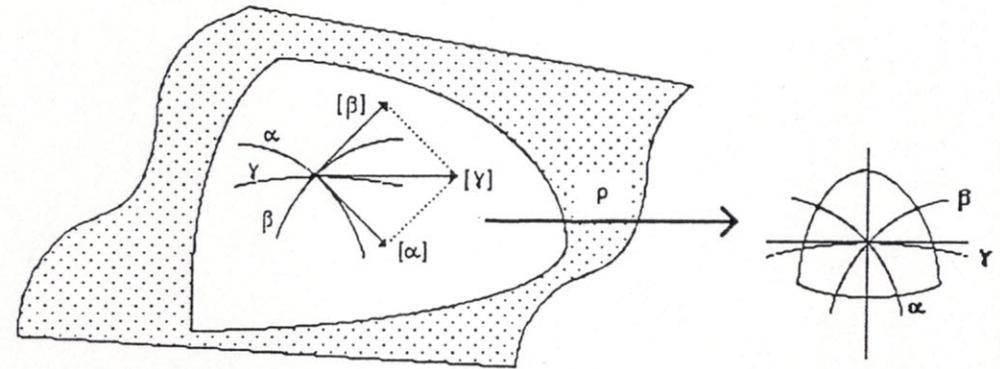


Figura 12.- Suma de vectores tangentes

**Operación producto por un escalar:** Sean dos cartas  $(U_i, \rho_i)$  y  $(U_j, \rho_j)$  de  $G$  centradas en  $g$  y sea un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sea un vector tangente  $[\alpha]$  en  $g$ . Tenemos que  $\exists \alpha = \rho_i^{-1} \cdot \alpha \in \mathbb{V}_i \subset \mathbb{R}^n$ . Mediante la operación producto de  $\mathbb{R}^n$  podemos definir  $\gamma = \lambda \alpha \in \mathbb{V}_j \subset \mathbb{R}^n$ . Con ello definimos la operación producto por un escalar según:

$$\lambda \cdot [\alpha] = [\gamma] = [\rho_j^{-1}(\lambda(\rho_i \cdot \alpha))]$$

Por ejemplo, sea  $\alpha: (a,b) \rightarrow G$  que hace corresponder  $\alpha(t) \in G$  para todo  $t \in (a,b)$ . Definimos  $\lambda\alpha$  como  $\gamma: (a/\lambda, b/\lambda) \rightarrow G$  que hace corresponder  $\gamma(t) = \alpha(\lambda t) \in G$  para todo  $t \in (a,b)$ .

**Operación conmutación  $[\cdot]$ :** Sean  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  dos vectores tangente. <sup>sobre el neutro</sup> En tal caso deben existir  $[\alpha*\beta]$  y  $[\beta*\alpha]$ , (que en el caso particular de grupos abelianos representan un mismo vector tangente). Con el concurso de las dos operaciones previamente introducidas podemos definir la anticonmutación según:

$$[[\alpha], [\beta]] = [\alpha*\beta] - [\beta*\alpha]$$

El espacio tangente, con las tres operaciones definidas presenta estructura de álgebra. Quizás sea oportuno adelantar que un álgebra muy familiar a los físicos y químicos como es el álgebra del momento angular puede contemplarse como el espacio tangente al grupo de rotaciones en el espacio real tridimensional sobre el elemento identidad de este grupo de Lie.

(En el apéndice 4.1 se detalla la estructuración del tangente haciendo uso de la notación, más habitual, de derivación de funciones).

⊗ Notemos que esta operación es cerrada solamente en el plano  $\text{tag}$  sobre el neutro, luego el álgebra queda definida <sup>solo</sup> sobre el espacio  $\text{tag}$  a la identidad. Mas adelante se verá que existe un isomorfismo entre esta álgebra y la de los campos vectoriales sobre el grupo. (Ver apéndice 6)

## Sistema de generadores del espacio tangente en un punto

Deseamos obtener una base del plano tangente a  $p \in G$ . Para ello consideremos una carta diferenciable  $\mathbb{F}: V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset G$  y consideremos en  $V$  el conjunto de las funciones coordenadas  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  definidas por  $x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} / x_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i$ .

Supongamos por comodidad que  $p = \mathbb{F}(0, 0, \dots, 0) = \mathbb{F}(0)$ . Con todo ello consideremos las curvas de  $V$  definidas según

$$\alpha_i: \mathbb{I} = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow V / \alpha_i(t) = (0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0), \text{ es decir } x_j(\alpha_i(t)) = \delta_{ij} \quad \forall j$$

o lo que es lo mismo,  $t$  está en la posición  $i$ -ésima.

La existencia de la carta  $(\mathbb{F}, U)$  asegura la existencia de antiimágenes  $\alpha_i(t) = \mathbb{F}(\alpha_i(t))$  definidas por  $\alpha_i: \mathbb{I} = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{F}(V) / \alpha_i(t) = (\mathbb{F} \circ \alpha_i)(t)$ .

Las curvas  $\alpha_i$  definidas de este modo pasan por el punto  $p$  cuanto  $t = 0$ , puesto que  $\mathbb{F}(\alpha_i(0)) = \mathbb{F}(0) = p$ . Además tienen por vector tangente, al cual denotaremos como  $\mathfrak{X}_i$ , a  $[\mathbb{F} \circ \alpha_i]$ .

De este modo es posible encontrar un conjunto  $\{\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n\}$  de vectores tangentes a  $G$  en el punto  $p$  que son base del hiperplano tangente a  $G$  en dicho punto, ya que sus imágenes  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  en  $T_0V$  son tangentes a las curvas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $V$  en  $\mathbb{F}(p) \subset V$ . Recuérdese que la tangencia (y por ende las clases de equivalencia) de curvas de  $G$  la definimos en base a antiimágenes por sus cartas.

A modo de resumen diremos que  $\mathbb{F}: V \rightarrow U \subset G$  permite definir, de modo natural, otra aplicación  $\mathbb{F}_*: T_0V \rightarrow T_pG / \mathbb{F}_*(Y_i) = \mathfrak{X}_i$  que nos conduce a la base  $\{\mathfrak{X}_i\}$  del espacio tangente al grupo en el punto  $p$ .

(En el apéndice 4.2 se detalla algo más la generación del espacio tangente explicitando la notación, un tanto más habitual, de derivadas para los vectores tangente).

## Algebras de Lie

Una vez definidos los planos tangentes a un grupo topológico ya es posible hablar del tangente sobre el elemento neutro, habitualmente denominado álgebra de Lie del grupo. ¿Porqué tiene precisamente tanto interés el espacio tangente al grupo en su elemento neutro? Pensemos en una superficie inmersa en  $\mathbb{R}^3$  que exprese la topología de cierto grupo  $G$ . Cualquier plano tangente a dicha superficie es isomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Y éste es un isomorfismo entre álgebras. Así pues conocido un espacio tangente se conocen todos los posibles espacios tangentes. Hemos de trasladar esta valiosa propiedad a los espacios tangentes a los grupos de Lie, de modo que una vez descrito el espacio tangente por ejemplo en el elemento neutro, estén todos los posibles espacios tangentes descritos. Pero otro aspecto que merece ser justificado es el interés que se tiene por el conocimiento de estas álgebras. Es sabido que una curva o en general una hipersuperficie puede ser descrita como una envolvente de sus espacios tangentes. Dicho de otro modo, es posible construir una superficie a partir de la colección de sus planos tangentes. Así pues pudiera ser conveniente trabajar sobre los espacios tangentes y trasladar los resultados obtenidos al grupo de Lie.

### Isomorfismo entre espacios tangentes. La aplicación regular

Sea  $(G, *)$  un grupo de Lie y sea  $g \in G$ . Establecemos la siguiente aplicación diferenciable, llamada regular o de traslación derecha,  $R_g: G \rightarrow G / R_g(h) = g * h$ . En particular  $R_g(e) = g * e = g$ .

Es evidente que  $R_g$  es una biyección. Además, a partir del caracter diferenciable de la operación  $*$  del grupo de Lie inferimos que  $R_g$  es diferenciable (dejamos aparcado de momento el cómo realizar la diferenciación). Esto nos permite establecer un homeomorfismo entre un entorno de la identidad y un entorno de  $g$ . Y puesto que  $g$  es cualquier elemento del grupo, se infiere la existencia de un homeomorfismo entre un entorno de la identidad y un entorno de cada uno de los elementos del grupo. Dicho de otro modo, en un entorno del neutro se contiene la información analítica fundamental del

grupo de Lie.

Debido a que  $R_g: G \rightarrow G$  es diferenciable y a que  $R_g(e) = g$ ,  $R_g$  induce un isomorfismo lineal entre los espacios tangentes a  $G$  en  $e, T_e G$  y en  $g, T_g G$ :  $R_{g*}: T_e G \rightarrow T_g G / R_{g*}[\alpha] = [g * \alpha]$ .

Tenemos que  $R_{g*}$  es una aplicación:  $\forall x \in T_e G$  tiene imagen en  $T_g G$ .

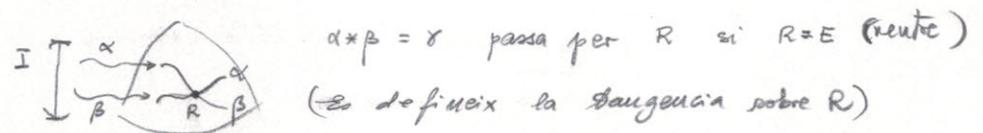
Además es lineal,  $R_{g*}([\alpha] + \lambda[\beta]) = [R_{g*}(\alpha)] + \lambda[R_{g*}(\beta)]$

Respeto el álgebra,  $[R_{g*}(\alpha), R_{g*}(\beta)] = R_{g*}([\alpha, \beta])$

Y tiene inversa,  $R_{g*} \cdot R_{g*}^{-1} = (R_g \cdot R_g^{-1})_* = (\mathbb{1})_* = \mathbb{1}$

Así pues  $R_g$  es un isomorfismo entre álgebras. En consecuencia, dado un grupo de Lie, éste tiene asociada una única álgebra (salvo isomorfismos), el álgebra de Lie del grupo, y esta se corresponde con el espacio tangente al grupo en su elemento neutro. donde se define el bracket como tercera operación.

Nota: l'álgebra [ ] sols està ben definida sobre el plauro tang a G sobre el neutre.



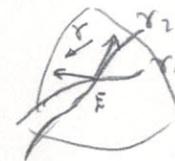
(Hi han altres álgebras isomorfs lligades a camps vectorials)

Nota: Respectar l'álgebra vol dir que si anomenem:

$$\gamma_1 = \alpha * \beta$$

$$\gamma_2 = \beta * \alpha$$

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$$



$R_{g*}$

per per binial

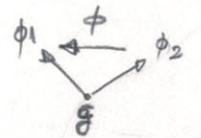


IMAGE sobre  $G$ .

Es a dir:

$$\begin{aligned} R_{g*}[\alpha, \beta] &= R_{g*}[\alpha * \beta] - R_{g*}[\beta * \alpha] = [R_g \alpha * R_g \beta] - [R_g \beta * R_g \alpha] \\ &= [R_g \alpha, R_g \beta] \end{aligned}$$

## Generadores del grupo de Lie. Aplicación exponencial

Vamos a ver en este apartado que es posible generar todo un subconjunto conexo de un grupo de Lie a partir de uno de sus elementos y una base del espacio tangente al grupo en ese mismo punto. Tiene especial interés la pieza conexa que contiene al neutro. Esta presenta estructura de subgrupo, y se genera a partir del elemento neutro y una base de su espacio tangente (una base de generadores del álgebra de Lie del grupo).

Dado un punto  $p$  y el espacio tangente en  $p$ , existe una aplicación llamada exponencial, definida desde dicho espacio sobre  $G$  que permite llegar a cualquier punto de  $G$  contenido en la misma región conexa que  $p$ :

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} \times T_p G &\rightarrow G \\ (t, \mathfrak{X}) &\rightarrow \exp(t \mathfrak{X}) = q \end{aligned}$$

Es debido a esta propiedad por lo que a los elementos de cualquier base  $\{\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n\}$  de  $T_p G$  se los denomina generadores del grupo. (Se suele escoger el tangente al elemento neutro).

(Los ejemplos del apartado siguiente nos permitirán comprender mejor el significado de esta aplicación. Más detalles pueden encontrarse a lo largo del apéndice 6).

## Ejemplos

### Ejemplo 1. Grupo $GL(n)$

Sea  $\mathcal{M}$  el conjunto de todas las matrices reales  $(n \times n)$  y sea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}$ . Tenemos que la estructura de grupo la proporciona la multiplicación matricial. Para definir la topología establecemos una carta sobre  $\mathbb{R}^{n^2}$  asociando a cada matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}$  el punto  $(a_{11}, \dots, a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ .

Estudiemos la continuidad de la multiplicación matricial:  $(A \times B)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ . Ello equivale a estudiar la continuidad en cada una de las coordenadas de su imagen en  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Puesto que cada elemento  $(A \times B)_{ij}$  es un polinomio con elementos de  $A$  y de  $B$  es obvia la continuidad de cada coordenada y por ende la continuidad de la multiplicación de matrices.

$GL(n)$  está constituido por conjunto de las matrices invertibles de  $\mathcal{M}$ . Tenemos que, por razones similares a las indicadas más arriba, debe ser continua la inversión de matrices definida por:

$$(A^{-1})_{kj} = (1/\det A)(kj\text{-adjunto } A)$$

Así pues se tiene que  $GL(n)$  es un grupo topológico. Para la diferenciabilidad acudiremos de nuevo a las imágenes en las cartas. Se constata, en base a que los polinomios son diferenciables, que  $GL(n)$  es un grupo de Lie.

### Ejemplo 2. Grupo $SO(2)$

Sea el grupo  $SO(2)$  de las matrices ortogonales  $(2 \times 2)$  de determinante +1:

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = R(\phi) \in SO(2)$$

establezcamos cartas  $\varphi: R(\phi) \rightarrow (\cos \phi, -\sin \phi, \sin \phi, \cos \phi) \in \mathbb{R}^4$ . Tenemos que las imágenes de  $SO(2)$  en sus cartas son fragmentos de curvas en  $\mathbb{R}^4$ . En consecuencia, el tangente sobre el neutro (y sobre cualquier otro elemento) es un espacio vectorial unidimensional.

$x(\phi) = (\cos \phi, -\sin \phi, \sin \phi, \cos \phi)$  es una curva de  $\mathbb{R}^4$  cuyo tangente sobre  $(1,0,0,1)$  es:  $[x(\phi)]_0 = [(-\sin \phi, -\cos \phi, \cos \phi, -\sin \phi)]_0 = (0, -1, 1, 0)$ .

Podemos considerar que la matriz  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  representa al tangente a  $SO(2)$  sobre la matriz que representa al elemento neutro  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Con las conocidas leyes de suma y producto de matrices junto con el producto de una matriz por un escalar, las matrices muestran estructura de álgebra. Esto nos permite plantear el siguiente límite (saliéndonos, claro está de los límites de  $SO(2)$ ):

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\phi} \left( \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En general podemos poner, de modo simbólico, que para cualquier grupo de Lie,

$$I = \lim_{\|\epsilon\| \rightarrow 0} \frac{R(\epsilon) - R(0)}{\|\epsilon\|}$$

si bien habitualmente, este límite no tiene sentido operativo (por ello lo de simbólico) puesto que, también en general, entre los elementos de un grupo multiplicativo  $\{G, *\}$  no se tiene definida ni la suma (+) ni el producto por un escalar ( $\cdot$ ). Consideremos a modo de ejemplo las rotaciones alrededor de un eje. El producto de dos rotaciones  $R(\theta)$  y  $R(\phi)$  representa la rotación consecutiva de ambas:  $R(\theta + \phi) = R(\theta) * R(\phi)$ . Esta operación define la estructura del grupo de las rotaciones. Nos preguntamos ahora ¿que manipulación física está asociada a la suma de rotaciones  $R(\theta) + R(\phi)$ ? Si utilizamos la representación matricial  $R$  de las rotaciones constatamos que el resultado no es ni siquiera una rotación.

Siguiendo con el grupo de matrices ortogonales  $(2 \times 2)$  de determinante +1, podemos justificar el motivo del nombre de la aplicación exponencial así como su relación con la función exponencial definida  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / x \rightarrow e^x$ :

Puesto que hemos escrito (¡estamos con matrices!) el tangente  $I$  como un límite (ver más arriba) pongamos que  $R(\epsilon) = R(0) + \|\epsilon\| I$ .

Consideremos el elemento  $R(\epsilon) \in SO(2)$ . Se tiene que, puesto que la operación del grupo es cerrada,  $R(\epsilon) * R(\epsilon) \in SO(2)$ . Escribamos  $R(\epsilon) * R(\epsilon) = [R(\epsilon)]^2$ . Sea  $n \in \mathbb{R}$ . Mediante el mismo razonamiento tenemos que  $[R(\epsilon)]^n \in SO(2)$ . Escribamos  $[R(\epsilon)]^n = [R(0) + \|\epsilon\| I]^n$ . Sea cierto número finito  $a \in \mathbb{R}$  y hagamos que  $n \rightarrow \infty$ . Podemos expresar que  $\|\epsilon\| = a/n$ . Con ello consideremos el límite siguiente cuando  $n \rightarrow \infty$ :  $\lim [R(0) + (a/n) I]^n = \exp(a I)$ .

O sea, vemos que la función "exponencial" definida en el apartado anterior (la cual permite generar todos los elementos contenidos en la pieza conexas del grupo de Lie que contiene al elemento neutro) es, para el caso de grupos de matrices, la ya conocida función exponencial de matrices. Así pues, el lenguaje simbólico empleado en secciones anteriores cobra quizás aun mayor sentido.

### Ejemplo 3. Grupo de operadores de rotación de funciones $f(x,y)$

Como último ejemplo consideremos el grupo de operadores de rotación  $\mathcal{R}(\phi)$  que actúa sobre funciones  $f(x,y)$  (grupo que es, por cierto, homeomorfo a  $SO(2)$ ). Sus elementos son operadores definidos entre espacios de funciones reales  $f$  de variable vectorial bidimensional ( $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Usemos la ecuación  $\mathcal{R}(\phi) f(x) = f(R(\phi)^{-1} x) = g(x)$  para definir estos operadores. Escribamos,

$$\mathcal{R}(\theta = -\phi) f(x) = f(R(\phi) x) \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{R}(\theta = 0) f(x) = f(x) \in \mathbb{R}$$

En los reales existe el límite siguiente:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{f(\mathbb{R}(\phi) \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})}{\phi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \phi} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$= \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) f(\mathbf{x})$$

comparamos esta ecuación con el límite siguiente también en  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\mathbb{R}(-\phi) - \mathbb{R}(0)}{\phi} f(\mathbf{x}) = \mathbb{I} f(\mathbf{x})$$

de este modo identificamos  $\mathbb{I} = \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)$ . Constatamos, en este caso, el

carácter simbólico tanto del límite como de la relación  $\exp(a \mathbb{I})$ .

Debe indicarse que es usual que en la definición de generadores se incluya al número imaginario puro en la expresión del límite. Así tenemos que

$$\mathbb{I} = \lim_{\|\epsilon\| \rightarrow 0} \frac{\mathbb{R}(\epsilon) - \mathbb{R}(0)}{i \|\epsilon\|}$$

con este convenio, los generadores obtenidos anteriormente deben de reescribirse como

$$\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad i \left( -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Para el caso de álgebras de varias dimensiones existe un generador por cada dimensión, o lo que es lo mismo  $\mathbb{I}$  se puede expresar en función de una base del álgebra de Lie. Así pues, en general, dada una base cualquiera del álgebra tenemos que:

$$\mathbb{R}(\mathbf{x}) = \exp \sum_j i a_j \mathbb{I}_j$$

Terminamos este apartado haciendo énfasis en la ecuación anterior: Todo elemento de un grupo de Lie perteneciente a un subconjunto conexo que contenga a la identidad puede obtenerse asignando valores a los parámetros  $a_j$  según la aplicación exponencial anterior. A los operadores  $\mathbb{I}_j$  se les llamará generadores del grupo de Lie (su elección no es única). Finalmente expresar que un grupo de Lie tiene tantos generadores como dimensiones tenga su álgebra de Lie (uno por cada parámetro continuo).

## A modo de Epílogo

Los grupos continuos, tales como  $SO(2)$ ,  $SO(3)$ ,  $U(n)$ ,  $GL(n)$ , etc., están constituidos por una colección infinita no numerable de elementos. Entre ellos se halla definida una operación interna (\*) que los dota de estructura de grupo. Además entre sus elementos existen unas relaciones de vecindad que dota asimismo a dicho conjunto de estructura de espacio topológico. Es constatable la continuidad tanto de la operación del grupo (\*) como de la inversión en todos los elementos del grupo (es decir, estas dos operaciones respetan en sus imágenes las relaciones de vecindad del grupo).

Estos grupos son también diferenciables puesto que es posible definir planos tangentes a la variedad de estos grupos en cualquiera de sus puntos. Existe una particularidad adicional en estos grupos y es el carácter diferenciable de las operaciones (\*) e inversión del grupo. Por este motivo se les llama grupos de Lie.

En los planos tangentes al grupo <sup>sobre la variedad</sup> es posible inducir, de modo natural, unas leyes de composición que les dotan de estructura de álgebra. Se constata un isomorfismo entre cualesquiera dos planos tangentes ~~y éste es un isomorfismo entre álgebras~~. Escogemos al plano tangente sobre el elemento neutro ~~como representante~~ y lo denominamos el álgebra de Lie del grupo. Encontramos pues que todo grupo de Lie presenta una única álgebra de Lie asociada (el hiperplano tangente al grupo sobre su elemento neutro).

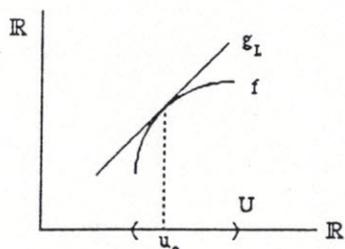
Dado el elemento neutro del grupo de Lie y una base del álgebra de Lie es posible generar cualquier elemento de la pieza conexa del grupo de Lie que contenga a su elemento neutro mediante una aplicación llamada exponencial (que es la carta natural de todo grupo de Lie). En consecuencia, un grupo de Lie tiene tantos generadores como dimensiones tiene su álgebra de Lie asociada, tal y como se desprende de la expresión de su carta exponencial. Al álgebra de Lie también se le llama álgebra de generadores del grupo de Lie.

APENDICES

## Apendice 1

### Tangencia entre curvas de $\mathbb{R}^2$

La condición de tangencia entre dos funciones  $f$  y  $g$  definidas desde  $U \subseteq \mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{R}$  puede expresarse por la condición, (ver figura A-1):



$$f, g \text{ tangentes} \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\|f(u) - g(u)\|}{\|u - u_0\|} = 0$$

Figura A-1. Tangencia en  $\mathbb{R}^2$ .

Asimismo, tenemos que dada una función  $f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  podemos definir la función lineal tangente a  $f$  en  $u_0$ ,  $g_L$ , según:  $g_L(u) = f(u_0) + \mathcal{L}(u - u_0)$ ;  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ( $\mathcal{L}$  aplicación lineal, ver figura A-1).

Damos a continuación algunas definiciones:

- $f: U \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  es diferenciable en  $u_0$  si  $\exists \mathcal{L}(u - u_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  tangente a  $f(u) - f(u_0)$ .
- La aplicación lineal  $\mathcal{L}$  se llama derivada de  $f$  en  $u_0$ :  $Df(u_0)$ .
- La aplicación  $Df: U \subseteq \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$  que a  $u_0$  le hace corresponder  $Df(u_0) = \mathcal{L}(u - u_0)$  se la denomina aplicación derivada  $Df$ .

## Apendice 2

### Aplicaciones diferenciables entre variedades

Sea una aplicación  $f: M \rightarrow N$ , siendo  $M, N$  dos grupos topológicos (o, en general dos variedades diferenciables) diremos que  $f$  es de la clase  $C^r$  (o sea  $r$  veces continuamente diferenciable) si su imagen entre cartas de  $M$  y  $N$  es de la clase  $C^r$ , o sea,  $\forall x \in M$  y  $\forall$  carta  $(V, \psi)$  de  $N$  con  $f(x) \in V \exists (U, \phi)$  de  $M$  con  $x \in U$ ,  $f(U) \subseteq V$  de modo que la representación de  $f$ ,  $f_{\psi\phi} = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  sea de la clase  $C^r$ . (Ver figura A-2.1).

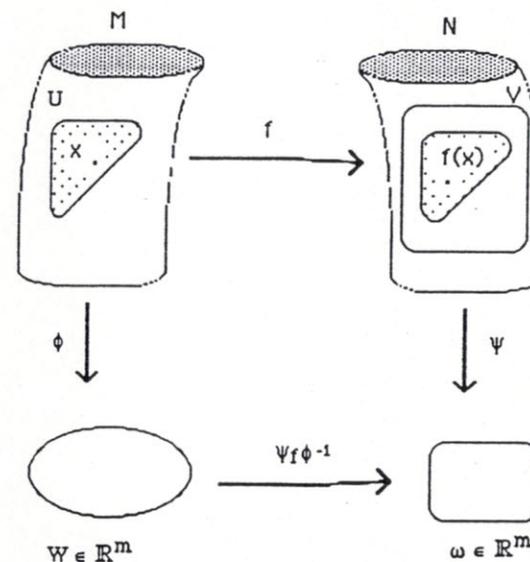


Figura A-2.1.- Diferenciabilidad de funciones entre grupos topológicos.

Consideremos ahora dos curvas  $c_1$  y  $c_2$  tangentes en  $m \in M$  y sea  $f: M \rightarrow N$  de la clase  $C^1$  (continuamente diferenciable). Sucederá que  $f \circ c_1$  y  $f \circ c_2$  son tangentes en  $f(m) \in N$ .

Esta proposición que puede visualizarse en la figura A2.2, se demuestra de modo implícito en el apéndice 5. (la demostración detallada puede encontrarse en Abraham p.44). Es consecuencia directa de la llamada regla de la cadena. Obviando justificaciones detalladas, podemos ver que:

por hipótesis  $c_1 \sim c_2 \rightarrow c'_1 = c'_2$ . Para la función compuesta aplicaremos la regla de la cadena de la derivación:  $(f \cdot c_1)' = f' \cdot c'_1 = f' \cdot c'_2 = (f \cdot c_2)' = f' \cdot c'_2 \rightarrow f \cdot c_1 \sim f \cdot c_2$ .

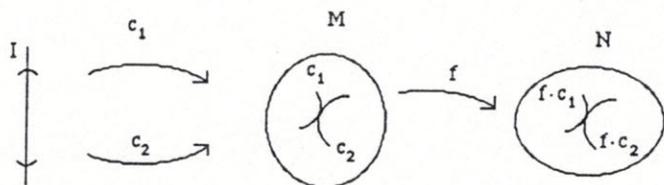


Figura A2.2.- Translación de la tangencia por f.

Por último indicaremos que este teorema nos permite establecer la siguiente definición de aplicación tangente a  $f, Tf$ , definida sobre los haces tangentes. Sea  $f: M \rightarrow N$  de la clase  $C^1$ , definimos tangente de  $f, Tf: TM \rightarrow TN$  a la aplicación definida según:  $Tf([c]_m) = [f \cdot c]_{f(m)}$ .

### Apendice 3

#### Sistema coordenado local

Sea  $(U_i, \varphi_i)$  una carta de una variedad  $M$   $n$ -dimensional de clase  $C^1$ . Consideremos en  $V_i \in \mathbb{R}$  el conjunto de funciones coordenadas  $\{x_1, \dots, x_n\}$  definidas por  $x_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / x_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$ .

Consideremos el conjunto de funciones  $\{x_1 \circ \varphi_i, \dots, x_n \circ \varphi_i\}$  definidas en  $U_i$  que llamaremos sistema coordenado local en  $U_i$ .

Para todo  $p \in M$  puede encontrarse una carta  $(U_i, \varphi_i)$  de modo que  $\varphi_i(p)$  se corresponda con el origen de  $\mathbb{R}^n$  y  $\varphi_i$  sea un homeomorfismo de  $U_i$  sobre un abierto de  $\mathbb{R}^n$  definido por  $|x_1| < a, \dots, |x_n| < a$ , para cierto número positivo  $a$ . Llamaremos a  $U_i$  vecindad cúbica de  $p$ .

## Apéndice 4

### 1. Estructuración del espacio tangente

Sea  $M$  una variedad diferenciable. Sea  $m \in M$ . Representamos por  $\Gamma(M, m)$  al conjunto de las curvas diferenciables  $\sigma$  en  $M$  definidas por  $\sigma: I_\sigma \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  con  $0 \in I_\sigma$  y  $\sigma(0) = m$ .

La tangencia de curvas  $\alpha, \beta \in \Gamma(M, m)$  es una relación de equivalencia. Pongamos que

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \left[ \frac{d(f \cdot \alpha)}{dt} \right]_{t=0} = \left[ \frac{d(f \cdot \beta)}{dt} \right]_{t=0} \quad \forall f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciable (ver$$

figura A-4).

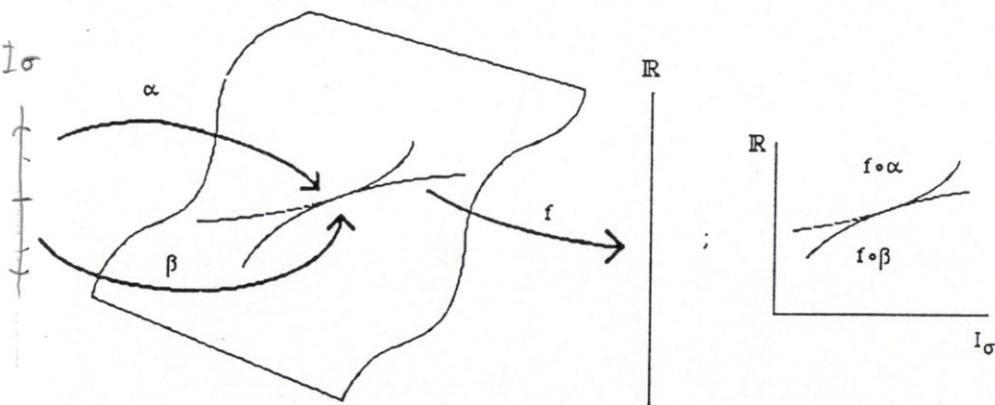


Figura A-4.- Ilustración de la definición de equivalencia de curvas dada en este apéndice.

Llamamos  $T_m M$ , espacio tangente a  $M$  sobre  $m$ , al conjunto de clases de equivalencia de curvas. Llamamos proyección  $p$  de una curva a la aplicación que le hace corresponder su clase de equivalencia  $p: \Gamma(M, m) \rightarrow T_m M / \sigma \rightarrow p\sigma = [\sigma]$ .

Vamos a definir ahora el concepto de acción de un vector  $v$  sobre una función diferenciable  $f$ . Para ello, sea  $v = p\sigma \in T_m M$  y sea  $f: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos acción de  $v$  sobre  $f$  como:

$$v(f) = \left[ \frac{d}{dt} (f \cdot \sigma) \right]_{t=0}$$

Así pues, todo vector  $v \in T_m M$  queda totalmente determinado por su acción sobre funciones diferenciables definidas en entornos de  $m$ .

Vamos a ver ahora que un vector es una derivación en el álgebra de funciones diferenciables en  $U$ .

Definamos previamente el álgebra de funciones definidas desde entornos  $U \in M$  sobre  $\mathbb{R}$ . Definimos  $h = \lambda f + g$  de modo que  $h(p) = \lambda \cdot f(p) + g(p)$ , donde  $(\cdot)$  es el producto y  $(+)$  la suma de números reales. Definimos  $h = f \cdot g$  de modo que  $h(p) = f(p) \cdot g(p)$ , donde  $(\cdot)$  es el producto de números reales. Con estas operaciones, las funciones  $f: U \in M \rightarrow \mathbb{R}$  presentan estructura de álgebra.

Llamemos  $v$  al vector  $[\sigma]$ . Con las consideraciones anteriores ya es obvio que:

- (i)  $v(a \cdot f) = a v(f)$ , o sea  $\left[ \frac{d}{dt} (a \cdot f \cdot \sigma) \right]_{t=0} = a \left[ \frac{d}{dt} (f \cdot \sigma) \right]_{t=0}$
- (ii)  $v(f + g) = v(f) + v(g)$  de modo análogo.
- (iii)  $v(f \cdot g) = \left[ \frac{d}{dt} (f \cdot g) \cdot \sigma \right]_{t=0} = \left[ \frac{d}{dt} ((f \cdot \sigma) \cdot (g \cdot \sigma)) \right]_{t=0} = (g \cdot \sigma)(0) v(f) + (f \cdot \sigma)(0) v(g) = g(m) v(f) + f(m) v(g)$ .

Así pues vemos que  $v$  se comporta como el operador derivada definido sobre el álgebra de funciones diferenciables definidas de  $U$  sobre  $\mathbb{R}$ .

Vamos a demostrar el siguiente TEOREMA:  $T_m M$  es un espacio vectorial de la misma dimensión que la de la variedad  $M$ .

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Sean  $\alpha, \beta \in \Gamma(M, m)$ . Sean  $v, w \in T_m M$  con  $v = p\alpha$ ,  $w = p\beta$ . Sea  $(U, \varphi)$  una carta de  $M$  centrada en  $m$  (o sea, tal que  $\varphi(m) = 0$ ). Llamemos ecuaciones de  $\alpha: I_\alpha \rightarrow M$  en esta carta a sus funciones coordenadas  $\alpha^i = x^i \cdot \varphi \cdot \alpha$ .

Consideremos, en  $\mathbb{R}^n$ , las funciones coordenadas  $\gamma^i = a \alpha^i + b \beta^i$  para todo  $i$ . Entonces debe existir sobre la variedad  $M$  la curva  $\gamma$  definida según  $\gamma = \varphi^{-1}(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))$ .

Sea una función  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \vec{x} & & p & & f(p) = (f \circ \varphi^{-1})(\vec{x}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n \\ t & & \gamma(t) & & (\gamma^1(t) \dots \gamma^n(t)) = (\varphi \circ \gamma)(t) = \vec{x}(t) \end{array}$$

Los esquemas anteriores ayudan a visualizar lo expresado anteriormente. Queremos demostrar la estructura de espacio vectorial de  $T_m M$ , o sea que, con los supuesto expresados,  $[\gamma] = a[\alpha] + b[\beta]$ .

Calculemos:

$$(p\gamma)(f) = \left[ \frac{d}{dt} [(f \circ \gamma)] \right]_{t=0} = \left[ \frac{d}{dt} [(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)] \right]_{t=0}$$

pero previamente hagamos la siguiente consideración (ver diagrama superior): llamemos

$h(t) = (f \circ \gamma)(t)$ . Tenemos que  $h(t) = (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)(t)$  y por consiguiente:

$$h(t) = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)(t) = (f \circ \varphi^{-1})[(\varphi \circ \gamma)(t)].$$

La función  $(f \circ \varphi^{-1})$  es una aplicación definida desde  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Sean  $(x^1, \dots, x^n)$  las coordenadas de  $\mathbb{R}^n$ . Es sabido que la diferencial de  $(f \circ \varphi^{-1})(x)$  se escribe como:

$$d(f \circ \varphi^{-1}) = \sum_i^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} dx^i$$

Ahora bien, las variaciones diferenciales  $dx^i$  no son independientes sino que todas ellas dependen de un parámetro  $t$  de acuerdo con las expresiones

$$dx^i = \frac{d(\varphi \circ \gamma)^i}{dt} dt = \frac{d\gamma^i}{dt} dt$$

por consiguiente la diferencial de  $h(t) = (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)(t)$  respecto de  $t$  puede expresarse según:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \sum_i^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \frac{d\gamma^i}{dt}$$

por consiguiente, podemos escribir que:

$$(p\gamma)(f) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right]_{(\varphi \circ \gamma)(0)} \left[ \frac{d\gamma^i}{dt} \right]_{t=0}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right]_0 \left( a \left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \right]_0 + b \left[ \frac{d\beta^i}{dt} \right]_{t=0} \right)$$

$$= a \sum_i^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \frac{d\alpha^i}{dt} + b \sum_i^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \frac{d\beta^i}{dt} = a \left[ \frac{d}{dt} (f \circ \alpha) \right]_0 + b \left[ \frac{d}{dt} (f \circ \beta) \right]_0$$

$$\Rightarrow (p\gamma)(f) = a(p\alpha)f + b(p\beta)f \Rightarrow (p\gamma) = a(p\alpha) + b(p\beta) \text{ como se quería demostrar.}$$

Hemos definido aquí la suma de vectores y producto de un vector por un escalar que dotan a  $T_m M$  de estructura de espacio vectorial. Si  $M$  es un grupo, se puede generar la estructura de álgebra a partir de la consideración adicional de la operación del grupo (ver en el apartado correspondiente de estos apuntes).

## 2. Base del espacio tangente

Sea  $\varphi$  una carta de  $M$  centrada en  $m \in M$  y sean las curvas  $\tau_j$  que definimos por sus coordenadas  $\tau_j^i = x^i \cdot \varphi \cdot \tau_j$  siendo  $\tau_j^i(t) = \delta_{ij} \cdot t$ .

Sea  $\alpha \in \Gamma(M, m)$ . Sea la función diferenciable  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , escribamos

$$\left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \right]_o (p\tau_j) f = \left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d(f \cdot \tau_j)}{dt} \right]_o = \left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \right]_o \left[ \frac{d(f \cdot \varphi^{-1} \cdot \varphi \cdot \tau_j)}{dt} \right]_o$$

que por razones análogas a las expresadas más arriba podemos poner esto como un sumatorio:

$$\left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \right]_o \sum_j \left[ \frac{\partial(f \cdot \varphi^{-1})}{\partial x^j} \right]_o \left[ \frac{d\tau_j^i}{dt} \right]_o = \left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \right]_o \sum_j \left[ \frac{\partial(f \cdot \varphi^{-1})}{\partial x^j} \right]_o \delta_{ij} =$$

$$\left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \right]_o \left[ \frac{\partial(f \cdot \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right]_o$$

escribamos:

$$\sum_i^n \left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \right]_o (p\tau_i) f = \sum_i^n \left[ \frac{\partial(f \cdot \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right]_o \left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \right]_o = \left[ \frac{d}{dt} (f \cdot \alpha) \right]_o = p(\alpha) f$$

$$\Rightarrow p(\alpha) = \sum_i^n \left[ \frac{d\alpha^i}{dt} \right]_o (p\tau_i)$$

O sea  $\{p(\tau_i)\}$ ,  $i=1, \dots, n$ , es un sistema generador de  $T_m M$ . Veamos que es libre, y con ello quedará demostrado que es una base de  $T_m M$ . Ello implícitamente conlleva que la dimensión de  $T_m M$  es precisamente  $m$ .

Que  $\{p(\tau_i)\}$ ,  $i=1, \dots, n$ , sea libre significa que  $\sum_i a_i p(\tau_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0 \forall i$

Consideremos una carta  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , consideremos su  $j$ -ésima componente y pongamos que

$$0 = \sum_i^n a_i p(\tau_i) \varphi^j = \sum_i^n a_i \left[ \frac{d}{dt} (\varphi^j \cdot \tau_i) \right]_o = \sum_i^n a_i \left[ \frac{d(\varphi^j \cdot \varphi^{-1} \cdot \varphi \cdot \tau_i)}{dt} \right]_o =$$

$$\sum_i a_i \sum_k \left[ \frac{\partial(\varphi^j \cdot \varphi^{-1})}{\partial x^k} \right]_o \left[ \frac{d\tau_i^k}{dt} \right]_o =$$

$$= \sum_i a_i \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial x^k} \frac{d\tau_i^k}{dt} = \sum_i a_i \sum_k \delta_{jk} \delta_{ij} = a_j$$

así pues,  $\forall j, a_j = 0$ . Con ello queda demostrado que  $\dim(T_m M) = \dim(M)$ .

Nota: Además de las dos notaciones que hemos usado para los vectores  $v$  de  $T_m M$ ,  $[\alpha]$  y  $p(\alpha)$ , en ocasiones se utiliza otra notación que explicita sus coordenadas en una carta determinada  $\varphi$ :

$p(\tau_i)$  se representa por  $\left[ \frac{\partial}{\partial r^i} \right]_m$  donde  $r^i = x^i \cdot \varphi$ , y el vector  $v$  se representa

$$\text{por } v = \sum_i \xi^i \left[ \frac{\partial}{\partial r^i} \right]_m$$

evidentemente esta representación depende de la carta  $\varphi$  escogida.

## Apéndice 5

### Diferencial de una aplicación

Este apéndice es una continuación del apéndice 2 pero lo hemos ordenado como apéndice 5 porque hacemos uso de la notación derivada introducida en el apéndice 4.

Sean  $M, N$  dos variedades diferenciables y sea  $f$  una función diferenciable definida entre ambas variedades  $f: M \rightarrow N$  (ver apéndice 2). Llamamos diferencial de  $f$  a la aplicación  $f_*$  que permite escribir el diagrama conmutativo siguiente, donde  $\Pi_M$  y  $\Pi_N$  son las aplicaciones, llamadas proyecciones, que hacen corresponder a todo vector tangente con su punto de tangencia:

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{f_*} & TN \\
 \Pi_M \downarrow & & \downarrow \Pi_N \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

Sea  $m \in M$ ;  $\Gamma(M, m)$ ;  $v_m \in T_m M$ . Debe existir  $\sigma \in \Gamma(M, m)$  que cumpla que  $p(\sigma) = v_m$ .

Consideremos ahora  $\Gamma(N, f(m))$ .  $f \circ \sigma$  es una curva de  $\Gamma(N, f(m))$ .

$f_*$  debe ser la función que aplicada al vector tangente a las curvas de la clase  $[\sigma]$  sobre el punto  $m$ ,  $v_m = p(\sigma)$ , nos lleve al vector tangente a las curvas de la clase  $[f \circ \sigma]$  sobre el punto  $f(m)$ ,  $p(f \circ \sigma)$ . Simplificando la notación pondremos  $f_*(v_m) = p(f \circ \sigma)$ . Vamos a ver que esta definición es, obviamente, independiente de la curva  $\sigma$  que se tome como representante de clase.

Sea  $\gamma \in \sigma$ . Sea  $h: U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $m \in U$ ,

$$p(f \circ \sigma)(h) = \left[ \frac{d(h \cdot f \circ \sigma)}{dt} \right]_{t=0} = \left[ \frac{d}{dt} (h \cdot f \circ \varphi^{-1} \cdot \varphi \circ \sigma) \right]_{t=0} =$$

$$\sum_i^n \left[ \frac{\partial (h \cdot f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right]_0 \left[ \frac{d(\varphi^i \circ \sigma)}{dt} \right]_0 = \sum_i^n \frac{\partial (h \cdot f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \frac{d(\varphi^i \circ \gamma)}{dt} = \left[ \frac{d}{dt} (h \cdot f \circ \gamma) \right]_0 =$$

$$= p(f \circ \gamma)(h) \Rightarrow p(f \circ \sigma) = p(f \circ \gamma)$$

c.q.d.

## Apéndice 6

### 1.- Campo vectorial sobre una variedad M

Un campo vectorial  $\mathbf{X}$  sobre una variedad M consiste en una asignación de un vector  $X_p$  a cada punto  $p \in M$ .

Si  $f$  es una función diferenciable en M,  $\mathbf{X}f$  es una función en M definida mediante  $(\mathbf{X}f)(p) = X_p(f)$ .

Un campo vectorial  $\mathbf{X}$  se llama diferenciable si  $\mathbf{X}f$  es diferenciable para toda función  $f$  diferenciable.

En términos de coordenadas locales  $u^1, \dots, u^n$ , un campo  $\mathbf{X}$  se expresa como (ver apéndice 4):

$$\mathbf{X} = \sum \xi_j^i \frac{\partial}{\partial u^j}$$

donde  $\xi_j^i$  son las coordenadas de  $\mathbf{X}$  respecto  $u^1, \dots, u^n$ .

$\mathbf{X}$  es diferenciable si y solo si sus componentes  $\xi_j^i$  son diferenciables.

### 2.- Curva integral

Sea  $\mathbf{X}$  un campo vectorial en una variedad M. Una curva  $x(t)$  en M se llama curva integral de  $\mathbf{X}$ , si para todo valor del parámetro  $t_0$ , el vector  $\mathbf{X}_{x(t_0)}$  es tangente a  $x(t)$  en  $x(t_0)$ .

Para todo punto  $p_0$  de M hay una única curva integral  $x(t)$  de  $\mathbf{X}$  definida para  $|t| < \epsilon$ , para algún  $\epsilon > 0$ , tal que  $p_0 = x(0)$ .

De hecho, sea  $u^1, \dots, u^n$  un sistema de coordenadas local en una vecindad U de  $p_0$  y sea

$$\mathbf{X} = \sum \xi_j^i \frac{\partial}{\partial u^j} \quad \text{en } U$$

entonces una curva integral de  $\mathbf{X}$  es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales (ver apéndice 4):

$$\frac{du^j}{dt} = \xi_j^i(u^1(t), \dots, u^n(t)) \quad j=1, \dots, n$$

cuya solución es una familia de curvas de las que sólo una pasa por  $x(0)$ .

### 3.- Grupos 1-paramétricos de transformaciones

Llamamos transformación diferenciable de M o simplemente transformación de M a cualquier difeomorfismo de M en sí mismo  $\varphi_t : M \rightarrow M$ . Llamamos órbita de p a toda transformación  $\varphi_t$  que cumpla que  $p = \varphi_0(p)$ .

Definimos un grupo 1-paramétrico de transformaciones de M mediante la aplicación  $\varphi$  definida por  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  tal que al par  $(t, p) \in \mathbb{R} \times M$  le hace corresponder la aplicación  $\varphi_t(p)$  que satisface las siguientes condiciones:

- (1)  $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_t : M \rightarrow M$  es una transformación de M
- (2)  $\forall t, s \in \mathbb{R}, p \in M$ , tenemos que  $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$ .

Cada grupo 1-paramétrico de transformaciones  $\varphi_t$  puede inducir un campo vectorial  $\mathbf{X}$  asociando a cada punto  $p \in M$  el vector  $X_p$  tangente a la órbita de  $p$ ,  $x(t) = \varphi_t(p)$ , en el punto  $p = \varphi_0(p)$ . La órbita  $\varphi_t(p)$  es una curva integral de  $\mathbf{X}$  que pasa por  $p$ .

Análogamente definimos un grupo local 1-paramétrico de transformaciones excepto en que  $\varphi_t(p)$  se define sólo para  $t$  en la vecindad de cero y  $p$  en un abierto de M:

Sean  $I_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon)$ ;  $U \subset M$ , definimos un grupo local 1-paramétrico de transformaciones como la aplicación  $\varphi : I_\epsilon \times U \rightarrow M$  tal que al par  $(t, p) \in I_\epsilon \times U$  le hace corresponder la imagen  $\varphi_t(p) \in M$  y que satisface las siguientes condiciones:

- (1')  $\forall t \in I_\epsilon, \varphi_t : U \rightarrow \varphi_t(U)$   
 $\varphi_t(U) \rightarrow \varphi_t(p)$ , es un difeomorfismo de U sobre el abierto  $\varphi_t(U)$
- (2')  $\forall t, s, s+t \in I_\epsilon$  y si  $p, \varphi_s(p) \in U$ , entonces  $\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$ .

Como en el caso anterior  $\varphi_t$  induce un campo vectorial  $\mathbf{X}$ . En contrapartida, si  $\mathbf{X}$  es un campo vectorial en una variedad M, para cada punto  $p_0 \in M$  existe una vecindad U

de  $p_0$ , un  $\epsilon > 0$  y un grupo local 1-paramétrico de transformaciones  $\varphi_t : U \rightarrow M$ , con  $t \in I_\epsilon$ , que induce el campo  $\mathbf{X}$  en  $U$ .

(la demostración de este teorema puede encontrarse en Kobayashi Cap. 1).

Vamos, sin embargo, a detenernos un poco en la siguiente PROPOSICION: Sea  $\varphi$  una transformación de  $M$ . Si un campo vectorial  $\mathbf{X}$  genera un grupo local 1-paramétrico de transformaciones  $\varphi_t$ , entonces el campo vectorial  $\varphi_* \mathbf{X}$  genera  $\varphi \cdot \varphi_t \cdot \varphi^{-1}$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathbf{Y} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Pi \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

Es fácil comprender que  $\varphi \cdot \varphi_t \cdot \varphi^{-1}$  es un grupo local 1-paramétrico de transformaciones. Para demostrar que induce el campo vectorial  $\varphi_* \mathbf{X}$ , consideremos  $p \in M$  y  $q = \varphi^{-1}(p)$ .

Previamente recordemos (ver apéndice 5) que si  $\exists \varphi : M \rightarrow M / a q$  le hace corresponder  $p = \varphi(q)$  se induce  $\varphi_* : TM \rightarrow TM / a X_q \in T_q M$  le hace corresponder  $\varphi_* (X_q) \in T_p M$  definida por

$$\varphi_* (X_q) = p(\varphi_* \mathfrak{X}) \Big|_{\varphi(q)=p} \quad \text{con} \quad X_q = p(\mathfrak{X}) \Big|_q$$

(no debe confundirse proyección  $p$  de una curva  $\mathfrak{X}$ ,  $p(\mathfrak{X}) = [\mathfrak{X}]$  con el punto  $p \in M$ ). Asimismo, recordemos (ver apéndice 4.1) que si  $X_q \in T_q M$ , dada la función  $\xi : U \subset M \rightarrow M$ , tenemos que  $X_q$  es una derivación:

$$X_q(\xi) = \left[ \frac{d}{dt} (\xi \cdot \mathfrak{X}) \right]_{t=0}$$

siendo  $\mathfrak{X}$  una curva de la clase de equivalencia de  $X_q$ . Calculemos  $\varphi_* (X_q)(\xi)$ :

$$\varphi_* (X_q)(\xi) = p[\varphi_* \mathfrak{X}]_p(\xi) = \left[ \frac{d}{dt} (\xi \cdot \varphi \cdot \mathfrak{X}) \right]_0$$

Volvamos sobre la demostración. Tenemos que  $\varphi_t$  induce  $\mathbf{X}$ , en consecuencia, el vector  $X_q$  de  $\mathbf{X}$  en el punto  $q$ , (obviamente,  $X_q \in T_q M$ ), debe ser tangente a  $x(t) = \varphi_t(q)$  en el punto  $q = x(0)$ .

Consideremos el esquema superior y calculemos  $\varphi_* (X_q)$ :

$$\varphi_* (X_q)(\xi) = p[\varphi \cdot x(t)](\xi) = \left[ \frac{d}{dt} (\xi \cdot \varphi \cdot x(t)) \right]_{t=0}$$

Llamemos  $y(t) = \varphi \cdot x(t)$ . Para  $t = 0$ , tenemos que  $x(0) = q$ , y por lo tanto  $y(0) = \varphi \cdot x(0) = \varphi(q) = p$ . Reescribiendo la ecuación anterior, tenemos que

$$\varphi_* (X_q)(\xi) = \left[ \frac{d}{dt} (\xi \cdot y(t)) \right]_{t=0} = (\varphi_* X)_p(\xi)$$

Volvamos sobre  $y(t) = \varphi \cdot x(t) = \varphi \cdot \varphi_t(q) = \varphi \cdot \varphi_t \cdot \varphi^{-1}(p)$ .

Así pues concluimos que  $(\varphi_* \mathbf{X})_p$  es tangente a  $\varphi \cdot \varphi_t \cdot \varphi^{-1}(p)$  c. q. d.

Como COROLARIO tenemos que un campo vectorial  $\mathbf{X}$  es invariante por  $\varphi$ , esto es,  $\varphi_* \mathbf{X} = \mathbf{X}$ , si y sólo si  $\varphi$  conmuta con las  $\varphi_t$ .

#### 4.- Algunos ejemplos de campos vectoriales invariantes

Sea  $G$  un grupo. Sea cierto vector fijo  $X_i \in T_e G$ . Sean las aplicaciones regulares  $R_g, \forall g$ . Entre los tangentes al grupo  $G$  sobre cada elemento  $g, T_g G$ , y el tangente sobre el neutro,  $T_e G$ , se inducen las aplicaciones  $R_{g*}$  tal que  $R_{g*}(X_i) = Y_j^g \in T_g G$ . Podemos definir de modo natural el campo vectorial  $A$  como el que asigna a cada punto  $g$  el vector  $R_{g*}(X_i) = Y_j^g \in T_g G$ . (Recordemos que  $X_i$  es cierto vector fijo de  $T_e G$  escogido arbitrariamente. En consecuencia podemos definir, de este modo, tantos campos vectoriales  $A$  como vectores tangente tenga  $T_e G$ ). Veamos que  $A$  es invariante bajo cualquier  $R_{h*}$ . O sea,  $R_{g*} A = A$ .

Para ello, consideremos  $g, h, g \cdot h = k$  elementos de  $G$ , las correspondientes aplicaciones translación derecha o aplicaciones regulares  $R_g, R_h, R_{g \cdot h} = R_k$  y

también las correspondientes aplicaciones inducidas  $R_{g*}, R_{h*}, (R_{g*h})_* = R_{k*}$ . Sean  $X_g, X_h, X_e$  y  $X_k$  los vectores del campo vectorial  $A$  sobre los puntos  $g, h, e$  y  $k$  de  $G$ . Calculemos:

$$R_{h*}(X_g) = R_{h*}(R_{g*}X_e) = (R_{h*} \cdot R_{g*})(X_e) = (R_{h \cdot g})_*(X_e) = (R_{g*h})_*(X_e) = R_{k*} X_e = X_k \in A$$

en resumen:  $R_{g*} A = A$ .

c. q.

d.

### 5.- La aplicación exponencial

Sea  $A$  un campo vectorial invariante a las traslaciones  $R_g$  de  $G$ . El campo  $A$  genera un grupo local 1-paramétrico  $\varphi_t$  de transformaciones locales

$$\varphi: I_\varepsilon \times U \rightarrow G \\ t \quad p \quad \varphi_t(p)$$

$\varphi_t(e)$  está definido para  $|t| < \varepsilon$ . Mediante  $R_a$  puede definirse  $\varphi_t(a)$  para  $|t| < \varepsilon$  y para todo  $a \in G$ :  $R_a(\varphi_t(e)) = \varphi_t(R_a(e)) = \varphi_t(a)$ . (Esto es posible realizarlo en virtud del corolario demostrado más arriba y en virtud de que  $R_a$  conmuta con  $\varphi_t$ ).

Por otra parte, puesto que  $\varphi_t(a)$  está definido para  $|t| < \varepsilon$  y  $\forall a \in G$ , se puede poner que:

$$\varphi_{t_0}(a) = \varphi_{t_0}(\varphi_{t_1}(b)) = \varphi_{t_0+t_1}(b)$$

con lo que llegamos a que  $t$  está definido  $\forall t < \infty$ .

Pongamos  $a_t = \varphi_t(e)$ , entonces  $a_{t+s} = a_t + a_s \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$ .

Denominamos a  $a_t$  como subgrupo 1-paramétrico de  $G$  generado por  $A$ . Usaremos la notación más abitual  $a_1 = \varphi_1(e) = \exp A$ .

Haciendo uso de esta notación, tenemos que  $\exp(tA) = a_t \quad \forall t$ .

A la aplicación  $\exp(A)$  definida según  $\exp: T_e G \rightarrow G$  se la denomina aplicación exponencial. (Recuérdese que existe una isomorfía entre el álgebra de todos los campos vectoriales invariantes frente a traslaciones, definidos en el apartado anterior, y el plano tangente sobre la identidad al grupo  $G$ ,  $T_e G$  puesto que cada  $X \in T_e G$  genera un campo  $A$  invariante).

Como vemos, todo elemento de  $G$  conectable al elemento neutro (o sea, que exista una curva continua  $\varphi_t$ , que pase tanto por el neutro como por el punto en cuestión) puede alcanzarse mediante la aplicación exponencial.

Concluimos que dado el neutro  $e$  y dado  $T_e G \ni X$  una aplicación, llamada exponencial, que permite definir cualquier punto de la pieza conexa de  $G$  que contenga al neutro.

$$\exp: I \times T_e G \rightarrow G \\ t \quad X \quad q = \exp t X = \varphi_t(e)$$

Por esta razón a toda base  $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$  de  $T_e G$  se la denomina generadores del grupo de Lie. Toda base del álgebra de Lie de un grupo de Lie es un álgebra de generadores del grupo de Lie

Otra manera de definir el tangente de una variedad diferenciable

Existe otra manera, llamémosla más clásica, de definir variedades que está más próxima a los conceptos clásicos de funciones de  $\mathbb{R}^n$ .

Sea una aplicación  $F: \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definimos variedad  $M$  de  $F$  como  $M = F^{-1}(0)$ . O sea, definimos la variedad como el núcleo de la aplicación  $F$ ,  $\text{Ker } F$ . (M. Spivak, Cálculo de Variedades, Reverté 1972, p.101)

Por ejemplo Sea  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que hace corresponder a  $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$  el valor  $x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}$ .  $F^{-1}(0)$  es un cilindro, subvariedad de dimension 2 en  $\mathbb{R}^3$ .

En cuanto al tangente, sea  $x \in M$ , definimos  $T_x M$  como el núcleo de la diferencial de  $F$ :

$$T_x M = \text{Ker } dF(x).$$

En efecto, supongamos que  $\gamma \in M$  es una curva de  $M$ , por lo tanto está en el núcleo de  $F$ , por lo tanto  $F(\gamma(t)) = 0$ . Calculemos la derivada de  $F$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\gamma(t)) - F(\gamma(0))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

pero este límite es precisamente, de acuerdo con la regla de la cadena, igual a

$$\frac{dF}{dt} = \nabla F \cdot \frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} \in \text{Ker } dF.$$

En el cálculo de variedades de Spivak se describe con detalle este tipo de enfoque. Debe indicarse sin embargo que existen variedades diferenciables que no son expresables como el núcleo de ninguna aplicación  $F$ ,  $M \neq F^{-1}(0)$ . Como ejemplo tenemos la conocida cinta de Moebius, y en general, cualquier superficie no orientable.

Sea  $X$  un campo vectorial  $X: E \subset M \rightarrow TM$   
 $m \rightarrow X(m) \in T_m$

p.13 Definido la multiplicación de campos vectoriales como composición de sus acciones sobre funciones

a)  $[X, Y]$  es un campo vectorial:  $[L_x, L_y] = i_x L_z$

b)  $X \cdot Y$  no es un campo vectorial:  $L_x L_y \neq \sum c_i L_i$

ejemplos del momento angular

Sea  $G$  un grupo de Lie.  $A$  un campo vectorial invariante a traslaciones izquierda (o derecha):

- La suma de dos campos vectoriales es un campo vectorial invariante
- El producto del campo vectorial por un  $m \in \mathbb{R}$  es un campo vectorial inu.
- El bracket  $[A, B]$  es un campo vectorial invariante

p.27

que un campo inq. invariante queda unívocamente determinado por su valor en la identidad del grupo

$\Rightarrow$  El álgebra de Lie de  $G$ ,  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de los campos vectoriales invariantes a inq.

$\Rightarrow$  Podemos identificar el espacio vectorial del álgebra de  $G$  con el espacio tangente a la identidad

"Geometry and Manifolds" by R.L. Bishop and RJ Griffiths  
 Vol 15 of Pure and Applied Mathematics, Paul A. Smith and Samuel Eilenberg  
 Academic Press N.Y 1964.