

Representacions projectives –ray representations– grups dobles i grups de recobriment –covering groups–

Josep Planelles

September 2, 2020

Generalment representem els grups de simetria mitjançant operadors lineals que actuen sobre els vectors Ψ d'un determinat espai de Hilbert, de manera que a cada element g del grup G li associem un operador lineal $D(g)$ –sovint la seua representació matricial– de manera que si $g_1 g_2 = g_3$ aleshores $D(g_1) D(g_2) = D(g_3)$.

Tanmateix, en mecànica quàntica, dos funcions idèntiques excepte un factor de fase representen el mateix estat. Per això definim el concepte de ray com el representat d'un conjunt de vectors de l'espai de Hilbert que difereixen d'una fase: $\underline{\Psi} = \{e^{i\alpha}\Psi : \alpha \in \mathbb{R}, 0 \neq \Psi \in \mathcal{H}\}$. Aleshores, hi ha una correspondència un a un entre els estats quàntics i els rays de longitud unitat (normalitzats).

Per tant, a cada element g del grup de simetria G hauríem d'associar-li un operador $D(g)$ que actuara sobre els rays de l'espai de Hilbert, és a dir, una aplicació amb rang i domini de rays i no vectors. En altres paraules, no hauríem de ser tan restrictius a l'hora de representar el grup. Hauríem de relaxar la definició del primer paràgraf i dir que si $g_1 g_2 = g_3$ aleshores $D(g_1) D(g_2) = \epsilon D(g_3)$, on $\epsilon = \epsilon(g_1, g_2)$ és un factor de fase que depen de g_1 i g_2 . A aquest tipus de representacions del grup s'anomenen representacions projectives (*projective or ray representations*[1]), mentre que les representacions en que no hi ha fase o que $\epsilon = 1$ s'anomenen representacions vectorials.

Ara bé, les representacions projectives no són estrictament un homomorfisme, cosa que fa que no siga tant senzill i còmode treballar amb aquestes representacions com treballar amb les representacions vectorials, per motiu del molest factor de fase ϵ . En conseqüència, pot ser interessant evitar aquestes representacions.

El cas és que sovint aquestes representacions projectives sorgeixen de manera natural en tractar problemes rellevants de la mecànica quàntica. Per exemple, quan hem d'aplicar operacions de simetria sobre funcions d'espín. Així, quan considerem rotacions (grup de l'esfera, $SO(3)$) sabem el conjunt d'harmònics esfèrics $\{Y_{\ell,m}, m = -\ell, -(\ell-1)\dots(\ell-1), \ell\}$ constitueixen una base de la irrep D_ℓ de $SO(3)$. La funció $Y_{\ell,m}$ és un producte de dues funcions, $\Theta_{\ell,|m|}(\theta)$ i $\Phi_m(\phi) = e^{im\phi}$. Una rotació d'angle 2π al voltant de l'eix z , deixa $\Phi_m(\phi)$ invariant si el número quàntic m és enter, cosa que succeeix amb les funcions de moment angular orbital. Al contrari, si considerem la funció de moment angular d'espín electrònic, $\ell = 1/2, m = \pm 1/2$, observem que una rotació d'angle 2π no és la identitat, sinó que canvia el signe de la funció, introduint així una fase $\epsilon = -1$.

Cal distingir entre l'efecte d'una rotació d'angle 2π en el sistema de coordenades i l'efecte d'aquesta rotació sobre la funció d'ona. El sistema de coordenades sí que retroba l'estat original després d'una rotació d'angle 2π al voltant de qualsevol eix que passe per l'origen. Tanmateix, una funció d'ona espínorial corresponent a una partícula de moment angular fraccionari, queda canviada de signe després d'efectuada aquesta rotació. Però torna a assolir el seu valor original després de repetir l'operació, és a dir, després de rotar un angle total de 4π radians. Contemplada com una operació sobre les funcions d'ona espínorials, l'operació R de rotació d'angle 2π al voltant d'un eix no és l'element identitat E del grup.

Podem imaginar una operació R de manera que R^2 siga precisament la identitat E . Tenim que la identitat és una rotació d'angle 4π , mentre que R representa una rotació d'angle 2π . Si considerem el producte de totes les operacions del grup de l'esfera per l'esmentada *nova* operació R , doblem el número d'operacions del grup. El nou grup format s'anomena *grup doble* de $SO(3)$ i la seva taula de caràcters quedarà ampliada respecte de la taula de caràcters del grup $SO(3)$ de l'esfera, essent les funcions d'espín base de les representacions D_ℓ amb ℓ fraccionari.

El concepte de *grup doble* G' del grup G és un artifici. De fet, és un artifici per lliurar-nos del molest factor de fase ϵ associat amb les representacions projectives del grup de l'esfera amb funcions de moment angular fraccionari. En primer lloc cal dir que G no és un subgrup de G' . De fet els elements de G no constitueixen un grup perquè els

$SO(3)$	E	...	$\propto C_{\phi}^{\phi}$	...	$\propto C_{\phi}^{2\phi}$	...	R	$\propto RC_{\phi}^{\phi}$	...	$\propto RC_{\phi}^{2\phi}$	...
D_0	1	...	1	...	1	...	1	1	...	1	...
D_1	3	...	$1 + 2 \cos \phi$	...	$1 + 2 \cos 2\phi$	...	3	$1 + 2 \cos \phi$	...	$1 + 2 \cos 2\phi$	...
D_2	5	...	$1 + 2 \cos \phi + 2 \cos 2\phi$	...	$1 + 2 \cos 2\phi + 2 \cos 4\phi$	...	5	$1 + 2 \cos \phi + 2 \cos 2\phi$	...	$1 + 2 \cos 2\phi + 2 \cos 4\phi$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$D_{1/2}$	2	...	$2 \cos \phi / 2$	...	...	...	-2	$-2 \cos \phi / 2$	...	...	...
$D_{3/2}$	4	...	$2 \cos \phi / 2 + 2 \cos 3\phi / 2$	...	...	...	-4	$-2 \cos \phi / 2 - 2 \cos 3\phi / 2$	...	...	...
$D_{5/2}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

seus elements no són tancats sota l'operació del grup: en la mesura que una rotació de 2π no equival a la identitat sinó a multiplicar per -1 , dues rotacions consecutives de π radians equivalen a l'operació $R \notin SO(3)$ i no al neutre $E \in SO(3)$. Aleshores la col·lecció d'elements de $SO(3)$ no és tancada sota l'operació $*$, i concloem que l'esmentada col·lecció d'elements de $SO(3)$ conjuntament amb la llei $*$ no presenta estructura de grup. El desllorigador d'aquesta aparent contradicció, i.e., que $SO(3)$ a la vegada és i no és un grup deriva del fet que $C(\phi)$ de $SO(3)$ i l'element $C(\phi)$ de $SO(3)'$ no són la mateixa cosa.

Allò que ens ha permès treballar amb les representacions projectives de $SO(3)$ com si foren representacions ordinàries o vectorials (a través de l'artifici de grup doble) és el fet que les representacions projectives del grup $SO(3)$ són equivalents a les representacions ordinàries del seu grup de recobriment ($SO(3)$ *universal covering group*). Aquest grup de recobriment de $SO(3)$, sovint anomenat $Spin(3)$, és isomorf a $SU(2)$ (grup unimodular de les transformacions unitàries en dos dimensions). Les representacions projectives de $SO(3)$ coincideixen amb les representacions ordinàries de $SU(2)$, i treballar amb les representacions ordinàries de $SU(2)$ és més senzill que amb les projectives de $SO(3)$.

Per acabar, mostrarem breument la relació (homomorfisme) entre $SU(2)$ i $SO(3)$. [2] Els elements de $SU(2)$ són matrius 2×2 complexes unimodulars (de determinant unitat) que poden ser expressades com l'exponencial de matrius hermítiques de traça zero. En particular, poden ser expressades en termes de les matrius de Pauli: $U = \exp[i(b\sigma_z + c\sigma_x + d\sigma_y)]$. [2] Considerem ara una matriu hermítica M de traça nul·la, expressada en termes de les matrius de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ en la forma:

$$M = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

i una transformació unitària d'aquesta matriu $M' = UMU^\dagger$, on $U \in SU(2)$. La transformació unitària no canvia la seua hermiticitat (se tracta d'un canvi de base) ni el valor de la traça (per ser un invariant). Per tant, M' se podrà escriure de manera semblant a M :

$$M' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}$$

Com que $\det(M') = \det(U)\det(M)\det(U^\dagger) = \det(M)$, trobem que també el determinant és un invariant. Per tant, la magnitud $\det(M) = z^2 + x^2 + y^2 = r^2$ és un invariant sota les operacions de $SU(2)$, just com ho és sota rotacions en $\mathbb{R}^3$. Açò suggereix un homomorfisme $SU(2)$ - $SO(3)$.

Hem dit que les matrius unitàries de $SU(2)$ poden ser escrites en la forma $e^{i\vec{r}\vec{\sigma}}$ on $\vec{r} = (x, y, z)$ és un vector de $\mathbb{R}^3$ i $\vec{\sigma}$ és un vector amb les matrius de Pauli de components, matrius que són la representació matricial dels operadors de moment angular d'espín. Per tant, els autovectors del quadrat del moment angular d'espín, $\widehat{S}^2$, formen bases de les representacions de $SU(2)$. Sabem també que els autovectors del quadrat del moment angular orbital, $\widehat{L}^2$, formen bases de les representacions de $SO(3)$. El moment angular orbital està lligat a un nombre quàntic ℓ enter (associat amb ℓ hi ha un nombre senar de funcions amb diferent m_ℓ), mentre que l'espín està lligat a un nombre quàntic s enter (associat amb un nombre senar de funcions amb diferent m_s) o semienter (associat amb un nombre parell de funcions amb diferent m_s). En conseqüència, hi ha una correspondència biunívoca entre les irreps de dimensió senar de $SU(2)$ i totes les irreps de $SO(3)$. Podem establir doncs un homomorfisme entre $SU(2)$ i $SO(3)$. Diem que $SU(2)$ és el grup doble o *covering group* de $SO(3)$.

References

- [1] M. Hamermesh, Chap. 8-9 in *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Dover, New York 1962.
- [2] Veure per més detalls veure <http://www3.uji.es/~planelle/APUNTS/TGS/Un.pdf> i les referències allí incloses.