Master en Física Aplicada

Assignatura: Física del sòlid ordenat (FSO)

Tema 8
Ona electromagnètica en el buit en absència de fons ($\rho = 0$, $\vec{\jmath} = 0$).

Josep Planelles
Departament de Química Física i Analítica, Universitat Jaume I,
Apartat 224, E-12080 Castelló, Spain

1 Equació d'ones

Les equacions de Maxwell en el buit i en absència de fons ($\rho = 0$, $\vec{\jmath} = 0$), són:

1. Llei de Gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
2. Absència de monopols magnètics: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
3. Llei de la inducció: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
4. Llei de Faraday: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Apliquen el rotacional a la tercera llei: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$.

Si tenim ara en compte la identitat vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$, amb la primera i quarta llei, trobem que $-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ que reescrivim:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{1}$$

El producte $\mu_0 \epsilon_0$ (permeabilitats elèctrica i magnètica del buit) és igual a la inversa del cuadrat de la velocitat de la llum en el buit ($1/c^2$). Per tant, l'eq. 1 no és més que l'equació de l'ona elèctrica que viatja a la velocitat c de la llum en el buit. Una equació similar la podem trobar per al camp magnètic si partim de la llei de Faraday (quarta llei de Mexwell) i procedim de manera anàloga.

Les solucions particulars de la eq. 1 són les ones monocromàtiques planes $\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ on $\vec{k}$ és el vector nombre d'ones ($\lambda = 2\pi/|\vec{k}|$), ω la freqüència ($\omega = 2\pi/T$) i $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ la velocitat de propagació. Si l'ona es desplaça a través d'un medi lineal, isòtrop i homogeni definit per μ i ϵ, la velocitat alshores seria $v = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$.

2 Índex de refracció

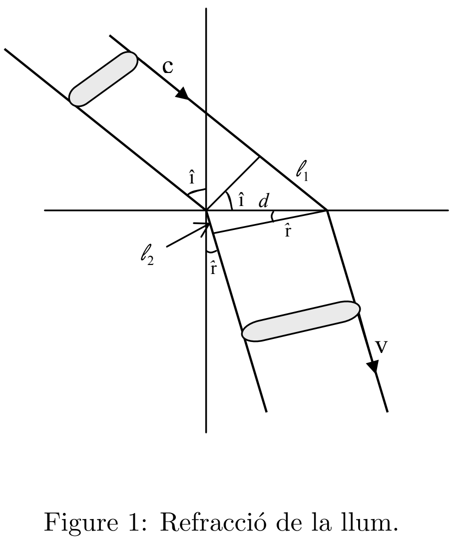

Figure 1: Refracció de la llum.

En la figura 1 mostrem un feix de llum que es refracta passant del buit on es propaga amb velocitat c a un medi lineal, isòtrop i homogeni en que ho fa a la velocitat v. En la mateixa figura veiem que la diferent velocitat en el diferents medis fa que mentre el raig superior recorre una distància $\ell_1 = ct$ l'inferior unicament recòrrega $\ell_2 = vt$. S'anomena índex de refracció a la ratio entre el sinus de l'angle que forma el raig incident amb la normal a la superfície de separació entre els medis i el corresponent sinus del raig refractat (vegeu els angles en la figura 1). A partir que $\sin \hat{\imath} = \ell_1/d$ i que $\sin \hat{r} = \ell_2/d$ tenim que:

$$n = \frac{\sin \hat{\imath}}{\sin \hat{r}} = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{c}{v} \tag{2}$$

Aleshores, $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$. La permeabilitat magnètica μ_r de la majoria d'objectes òpticament transparents és pràcticament la unitat.[1] També és així en altres molt medis dielèctrics. Per tant, $n = \sqrt{\mu_r\epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$. És a dir, en un medi transparent, l'índex de refracció està associat amb la constant dielèctrica relativa. En la taula presentem algunes dades.

substància	n(λ_{Na})	$\sqrt{\epsilon_r}$
aire ($P = 1$ at.)	1.0002926	1.000295
CO_2 ($P = 1$ at.)	1.00045	1.0005
poliestirè	1.59	1.60
vidre	1.5 - 1.7	2.0 - 3.0
aigua	1.33	9.0
alcohol	1.36	5.0

Com veiem, l'acord és bo en gasos i sòlid no polars. L'acord no és bo en el cas de substàncies polars, originat per una elevada polaritzabilitat estàtica. Veurem en temes posteriors que la constant dielectrica és una magnitud dinàmica que respon diferentment a les diferents freqüències de la radiació i, per tant, el valor estàtic constant que li assignem no sempre es correspon amb la resposta real del medi.

3 Quantificació

3.1 Consideracions prèvies

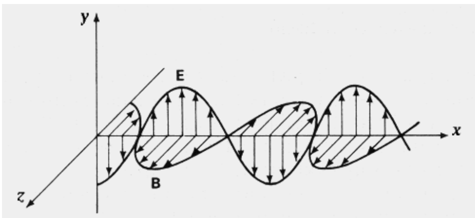

Figure 2: Ona plana

Considerem una ona plana com indica la figura 2, on $\vec{E} = E_0\, e^{i(kx-\omega t)}\vec{y}$, $\vec{B} = B_0\, e^{i(kx-\omega t)}\vec{z}$ i $\vec{k} = k\,\vec{x}$, on $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ són vectors unitaris en la direcció dels eixos. Calculem el rotacional del camp elèctric:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & E & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E}{\partial x} = i\,k\,E\,\vec{z} \tag{3}$$

Atès que $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$, podem escriure que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\,E\,\vec{k} \times \vec{y} = i\,\vec{k} \times \vec{E}$. De manera semblant:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{y}\frac{\partial B}{\partial x} = -i\,k\,B\,\vec{y} = i\,\vec{k} \times \vec{B} \tag{4}$$

En general, si $\vec{V} = V_x\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}$, amb $V_\alpha = V_\alpha^0\, e^{i(k_\alpha x-\omega t)}$, amb $\alpha = x, y, z$ tindrem que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = i\,\vec{k} \times \vec{V} \tag{5}$$

[1] Veure e.g. Kip p.350

3.2 El potencial vector

Des de la segon llei de Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, inferim que existeix $\vec{A}$, que anomenem potencial vector, de manera que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Substituint en la tercera llei, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, tenim:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{A} \to \vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \to \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla}\phi \tag{6}$$

perquè el rotacional d'un gradient és sempre zero. Al potencial ϕ l'anomenem potencial escalar.

3.3 El contrast o *gauge*

Hi ha una indeterminació en la definició dels potencials de la radiació. Els camps elèctric i magnètic no canvien si fem la substitució:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \vec{A} & \to & \vec{A} - \vec{\nabla}\chi \\ \phi & \to & \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{array} \right\}$$

Aquesta indeterminació permet triar un χ determinat (elecció del contrast o del *gauge*). Triem χ de manera que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ i $\phi = 0$. Amb aquest gauge podem escriure que

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{7}$$

3.4 Equació d'ona del potencial vector

Subtituïm en la quarta equació de Maxwell, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, els camps en termes del potencial vector i tenim en compte la identitat vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ i el gauge ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$). Trobem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \end{array} \right\} \to \nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \tag{8}$$

També el potencial vector segueix l'equació de D'Alembert. Les solucions particulars d'aquesta equació són les ones planes:

$$\vec{A} = \vec{A}_0\, e^{i\,(\vec{k}_\lambda \vec{r} - \omega_\lambda t)} = (q_\lambda^0\, e^{-i\,\omega_\lambda t})(\vec{A}_\lambda^0\, e^{i\,\vec{k}_\lambda \vec{r}}) = q_\lambda(t)\vec{A}_\lambda(\vec{r}) \equiv q_\lambda \vec{A}_\lambda$$

on $\vec{A}_\lambda^0$ és un vector unitari en la direcció del camp. Cal tenir present que $\vec{A}_\lambda^0$ és un vector unitari real mentre que q_λ^0 és una magnitud escalar que pot ser complexa ($q_\lambda^0 = |q_\lambda| e^{i\theta}$).

3.5 Energia electromagnètica

L'energia electromagnètica és la suma extesa a tot el volum:

$$U = \int_V \frac{1}{2}(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H})dv = \frac{1}{2}\int_V (\epsilon_0\, E^2 + \frac{1}{\mu_0}\, B^2)dv \tag{9}$$

Sabem que $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\, \dot{q}_\lambda\, \vec{A}_\lambda$, on $\dot{q}$ representa $\frac{dq}{dt}$. Tanmateix, sabem que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\,\vec{k}_\lambda \times \vec{A} = i\,q_\lambda(\vec{k}_\lambda \times \vec{A}_\lambda)$.

Aleshores, obtenim una energia real a partir de camps complexos fent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}^* \cdot \vec{E} = \dot{q}_\lambda^*\; \vec{A}_\lambda^0\, e^{-i\,\vec{k}_\lambda \vec{r}}\; \dot{q}_\lambda\; \vec{A}_\lambda^0\, e^{i\,\vec{k}_\lambda \vec{r}} = \dot{q}_\lambda^*\, \dot{q}_\lambda \\ \\ \vec{B}^* \cdot \vec{B} = (\vec{k}_\lambda \times \vec{A}_\lambda^0)^*(\vec{k}_\lambda \times \vec{A}_\lambda^0)\, q_\lambda^* q_\lambda \end{array} \right\} \tag{10}$$

Amb la identitat vectorial $(a \times b)(c \times d) = (ac)(bd) - (ad)(bc)$, tenim que $|\vec{k}_\lambda \times \vec{A}_\lambda^0|^2 = |\vec{k}_\lambda|^2 |\vec{A}_\lambda^0|^2 - |\vec{k}_\lambda \cdot \vec{A}_\lambda^0|^2$. Com $|\vec{A}_\lambda^0|^2 = 1$ i $\vec{k}_\lambda \cdot \vec{A}_\lambda^0 = 0$ (el vector $\vec{k}$ de propagació és perpendicular al camp $\vec{A}$), trobem que:

$$\vec{B}^* \cdot \vec{B} = |\vec{k}_\lambda|^2\, q_\lambda^* q_\lambda = \mu_0\, \epsilon_0\, \omega_\lambda^2\, q_\lambda^* q_\lambda \tag{11}$$

on hem considerat que $c^2 = 1/(\mu_0\, \epsilon_0) = \omega_\lambda^2 / |\vec{k}_\lambda|^2$.

Amb tot açò l'energia queda:

$$U = \frac{1}{2}(\dot{q}^*_\lambda \dot{q}_\lambda + \omega_\lambda^2\, q^*_\lambda q_\lambda) \int \epsilon_0 dv \tag{12}$$

Anomenem $I = \int \epsilon_0 dv$. Si redefinim $q \to q/\sqrt{I}$ tenim

$$U = \frac{1}{2}\, \dot{q}^*_\lambda \dot{q}_\lambda + \frac{1}{2}\omega_\lambda^2\, q^*_\lambda q_\lambda \tag{13}$$

on q_λ és una magnitud complexa depenent del temps.

Si tenim en compte que $q_\lambda = q^0_\lambda\, e^{-i\,\omega_\lambda t}$, tenim que $\dot{q}_\lambda = -i\omega_\lambda q_\lambda$ i $\dot{q}^*_\lambda = i\omega_\lambda q^*_\lambda$. Per tant,

$$U = \omega_\lambda^2\, q^*_\lambda q_\lambda. \tag{14}$$

3.6 Quantificació

Per a poder procedir a la quantificació definim les magnituds *reals* $Q_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_\lambda + q^*_\lambda)$ i $P_\lambda = \dot{Q}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q}_\lambda + \dot{q}^*_\lambda)$. Tenim que:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2P^2_\lambda = \dot{q}^2_\lambda + (\dot{q}^*_\lambda)^2 + 2\, \dot{q}^*_\lambda \dot{q}_\lambda = -\omega^2_\lambda\, q^2_\lambda - \omega^2_\lambda\, (q^*_\lambda)^2 + 2\, \dot{q}^*_\lambda \dot{q}_\lambda \\ \\ 2Q^2_\lambda = q^2_\lambda + (q^*_\lambda)^2 + 2\, q^*_\lambda q_\lambda \end{array} \right\} \tag{15}$$

Per tant: $\frac{1}{2}(P^2_\lambda + \omega^2_\lambda Q^2_\lambda) = \frac{1}{2}\, \dot{q}^*_\lambda \dot{q}_\lambda + \frac{1}{2}\omega^2_\lambda q^*_\lambda q_\lambda = U$.

Reconeixem doncs l'hamiltoniana clàssica $\mathcal{H}_\lambda = \frac{1}{2}P^2_\lambda + \frac{1}{2}\omega^2_\lambda Q^2_\lambda$ d'un oscil·lador harmònic de massa unitat i freqüència ω_λ. La corresponent quantificació dóna lloc a energies discretes $E_\lambda(v) = (v + 1/2)\hbar\, \omega_\lambda$.

L'hamiltonià mecanoquàntic és doncs $\hat{\mathcal{H}}_\lambda = \frac{1}{2}\hat{P}^2_\lambda + \frac{1}{2}\omega^2_\lambda Q^2_\lambda$, on $\hat{P}_\lambda = -i\hbar\frac{\partial}{\partial Q_\lambda}$. Podem doncs definit creadors i aniquiladors[2] $b_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_\lambda Q_\lambda - i\hat{P}_\lambda)$, $b^+_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_\lambda Q_\lambda + i\hat{P}_\lambda)$ de manera que:

$$b^+_\lambda b_\lambda = \frac{1}{2}[\hat{P}^2_\lambda + \omega^2 Q^2_\lambda + i\omega(Q_\lambda\, - \hat{P}_\lambda\, Q_\lambda)] = \frac{1}{2}[\hat{P}^2_\lambda + \omega^2 Q^2_\lambda + i\omega(i\hbar)] = \frac{1}{2}[\hat{P}^2_\lambda + \omega^2 Q^2_\lambda - \hbar\omega] \tag{16}$$

Per tant, $\hat{\mathcal{H}}_\lambda = b^+_\lambda b_\lambda + \frac{1}{2}\hbar\omega$ i, amb una correcció *had hoc* del zero d'energies (restem $\frac{1}{2}\hbar\omega_\lambda$): $\hat{\mathcal{H}}_\lambda = b^+_\lambda b_\lambda$. La comparació entre $\hat{\mathcal{H}}_\lambda = b^+_\lambda b_\lambda$ i $u_\lambda = \omega^2_\lambda\, q^*_\lambda\, q_\lambda$ sembla suggerir la identificacció de b^+/b amb els operadors associats a q/q^*. Si escrivim:

$$b^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega\, Q \pm i\hat{P}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\frac{\omega}{\sqrt{2}}(q + q^*) \pm \frac{i}{\sqrt{2}}(\dot{q} + \dot{q}^*)] \tag{17}$$

Recordem que $\dot{q} = -i\omega q$, per tant,

$$b^\pm = \frac{1}{2}[\omega(q + q^*) \pm \omega(q - q^*)] \to \left\{ \begin{array}{l} b^+ = \omega q \\ b = \omega q^* \end{array} \right. \tag{18}$$

Trobem doncs les correspondències $b^+ \to \omega q$ i $b \to \omega q^*$. En altres paraules, la quantificació ens porta des de $u_\lambda \to \hat{\mathcal{H}}_\lambda$:

$$u_\lambda = \omega^2_\lambda q^*_\lambda\, q_\lambda = \omega^2_\lambda q_\lambda\, q^*_\lambda \to \hat{\mathcal{H}}_\lambda = \omega^2_\lambda \hat{q}_\lambda\, \hat{q}^*_\lambda = b^+_\lambda b_\lambda \tag{19}$$

amb $b^+_\lambda = \omega q_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_\lambda Q_\lambda + i\hat{P}_\lambda)$ i $b_\lambda = \omega q^*_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_\lambda Q_\lambda - i\hat{P}_\lambda)$.

[2] Alternativament hom pot, abans de definir els creadors/aniquiladors, cercar un canvi de variables $Q_\lambda = a\xi$ que converteix l'hamiltonià en $\hat{\mathcal{H}}_\lambda = -\frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{a^2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\omega^2_\lambda a^2 \xi^2$, i triar a de manera que es puga treure factor comú: $\frac{\hbar^2}{a^2} = \omega^2_\lambda a^2$. Aleshores resulta $\hat{\mathcal{H}}_\lambda = \hbar\omega_\lambda[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi^2] = \hbar\omega_\lambda \hat{\mathcal{H}}_\xi$. Podem definir ara creadors/aniquiladors $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - i\hat{p}_\xi)$, $b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + i\hat{p}_\xi)$, amb $\hat{p}_\xi = -i\partial/\partial\xi$, de manera que $\hat{\mathcal{H}}_\xi - 1/2 = b^+ b$. Aquests són creadors aniquiladors de fotons de massa, freqüència unitat, així com també d'un quant d'energia.

L'ona electromagnètica és una superposició d'ones planes: $A(\vec{r},t) = \sum_\lambda q_\lambda(t)\, A_\lambda(\vec{r})$. La suma s'exten a totes les freqüències i totes les polaritzacions. Aleshores,

$$U = \sum_\lambda u_\lambda = \sum_\lambda \frac{1}{2}(P_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2) \tag{20}$$

Per tant, l'hamiltonià serà;

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_\lambda \mathcal{H}_\lambda = \sum_\lambda \frac{1}{2}(\hat{P}_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2) \tag{21}$$

i l'energia $E = \sum_\lambda (v_\lambda + 1/2)\hbar\omega_\lambda$ que redefinint el zero queda $E = \sum_\lambda v_\lambda \hbar\omega_\lambda$.

La radiació pot doncs contemplar-se con una col·lecció d'oscil·ladors harmònics. Tanmateix pot ser descrita per una col·lecció v_λ de partícules d'energia $\hbar\omega_\lambda$. La transició entre dos nivells de l'oscil·lador pot interpretar-se com la creació/aniquilació d'un fotó. Per aquest motiu, els operadors $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega\, Q - i\hat{P})$, $b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega\, Q + i\hat{P})$ que actuant sobre les funcions Ψ_v de l'oscil·ladors harmònic canvien en una unitat el nombre quàntic, $b\Psi_v \propto \Psi_{v-1}$,$b^+\Psi_v \propto \Psi_{v+1}$ s'anomenen creadors i aniquiladors (de fotons).

En resum, la radiació electromagnètica pot contemplar-se com una col·lecció de partícules d'energia $\hbar\omega_\lambda$, l'hamiltonià de les quals es pot escriure $\hat{\mathcal{H}} = \sum_\lambda b_\lambda^+ b_\lambda$ o també $\hat{\mathcal{H}} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda b_\lambda(\xi)^+ b_\lambda(\xi)$, si definim les coordenades $\xi = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{\hbar}}\, Q$ que fan referència fotons de massa, freqüència i energia unitat (vegeu peu de pàgina anterior).