Efecte Aharonov-Bhom, o com sense aplicar cap força podem modificar l'estat quàntic i l'energia d'un sistema.

Imaginem un partícula que es mou dins d'un cilindre fofo (és a dir que està situada en qualsevol lloc entre les parets d'un cilindre i un segon cilindre circumscrit). En el forat interior hi ha una bobina que si la connectem a la xarxa elèctrica produeix, en l'esmentat forat interior, un camp magnètic $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$, on $\vec{u}_z$ és el vector unitari en la direcció vertical, mentre que a l'exterior no produeix cap efecte (el camp magnètic és sempre $\vec{B} = 0$ en l'exterior de la bobina, independentment que aquesta estiga o no connectada a la xarxa elèctrica).

Si la bobina està desconnectada, aleshores $\vec{B} = 0$ en tot l'espai. L'equació d'autovalors per a la nostra partícula és, aleshores,

$$\underbrace{\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi^2}\right]+\frac{p_z^2}{2m_e}\right\}}_{\hat{\mathcal{H}}_0}\Phi(\rho,z,\phi) = E\,\Phi(\rho,z,\phi) \tag{1}$$

Separem variables: $\Phi(\rho,z,\phi) = R(\rho)\Psi(\phi)Z(z)$. Cada factor dona compliment a:

$$\hat{L}_z^2\Psi(\phi) = m^2\hbar^2\Psi(\phi) \tag{2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = E_z\,Z(z), \qquad E_z = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{n_z\pi}{L}\right)^2 \tag{3}$$

Si substituïm els autovectors solucions d'aquestes dues equacions en l'equació (1) obtenim la corresponent equació d'autovalors per a $R(\rho)$:

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)\right]+\frac{\hbar^2m^2}{2m_e\rho^2}+E_z\right\}R(\rho) = E\,R(\rho) \tag{4}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left[k_{m\,n}^2+\left(\frac{n_z\pi}{L}\right)^2\right] \tag{5}$$

on k_{mn} és la n-èssima solució de l'equació radial (la qual és també funció del nombre quàntic rotacional m).

Ara suponem que la bobina està connectada. Aleshores dintre de la bobina $\vec{B} \neq 0$. Si tenim en compte la definició de rotacional en coordenades cilíndriques, i que el camp magnètic $\vec{B}$ és el rotacional del potencial vector $\vec{A}$, tenim:

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_\phi)\right]\vec{u}_\rho + \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right]\vec{u}_\phi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right]\vec{u}_z \quad (6)$$

Si definim ara:

$$\vec{A} = A_\phi \vec{u}_\phi = \begin{cases} \frac{1}{2} B\,\rho\,\vec{u}_\phi & 0 < \rho < a \\ \frac{Ba^2}{2\rho}\,\vec{u}_\phi & a < \rho < \infty \end{cases} \quad (7)$$

comprovem que:

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi)\right]\vec{u}_z = \begin{cases} B\,\vec{u}_z & 0 < \rho < a \\ 0 & a < \rho < \infty \end{cases} \quad (8)$$

Notem que mentre que el potencial vector $\vec{A}$ presenta continuitat en $\rho = a$, el camp magnètic $\vec{B}$ presenta un salt a aquest mateix valor $\rho = a$ del radi[1].

L'hamiltonià del sistema en presència de camp magnètic implica el canvi:

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A} \quad (9)$$

[1]Podríem pensar que, atès que $B = 0$ en qualsevol lloc del nostre sistema, podríem trobar una tranformació del potencial vector abans definit (un gauge) que permetera que $\vec{A} = 0$ en la regió ocupada pel sistema. Aquest tipus de transformació no existeix o, per ser més precisos, direm que no hi ha cap transformació lliure de singularitats que done lloc a aquest resultat. El motiu deriva del fet que l'espai ocupat pel sistema no es simplement conectat, aleshores no és topològicament trivial.
El que és inquestionable és que $\Phi = \int \vec{B}d\vec{S} = \oint \vec{A}d\vec{l} \neq 0$ i que qualsevol tranformació ha de respectar aquest resultat.
Sembla, a partir de l'efecte Aharonov-Bhom, que el potencial vector $\vec{A}$ és quelcom més que una conviniencia matemàtica. Precisant més, allò que té significat físic (i que es conserva sota qualsevol gauge) és la seua circulació (que no és altra cosa que el fluxe del camp).

Amb el vertor $\vec{A}$ triat comprovem de seguida que $div\,\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{A} = 0$:

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho\,A_z)\right] = 0 \tag{10}$$

Aleshores $\left[\hat{p}, \vec{A}\right] = 0$ i tenim que:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} - \frac{e}{m_e}\hat{A}\hat{p} + \frac{e^2}{2m_e}\hat{A}^2 \tag{11}$$

Calculem els termes $\hat{A}\hat{p}$ i $\hat{A}^2$:

$$\hat{A}\hat{p} = A_\phi\vec{u}_\phi(-i\hbar)\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right] \tag{12}$$

efectuant els productes escalars i substituint:

$$\hat{A}\hat{p} = -i\hbar A_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} = \begin{cases} -i\hbar\frac{B}{2}\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{B}{2}\hat{L}_z & 0 < \rho < a \\ -i\hbar\frac{Ba^2}{2\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{Ba^2}{2\rho^2}\hat{L}_z & a < \rho < \infty \end{cases} \tag{13}$$

Anàlogament:

$$\hat{A}^2 = \begin{cases} \frac{1}{4}B^2\rho^2 & 0 < \rho < a \\ \frac{1}{4}B^2\frac{a^4}{\rho^2} & a < \rho < \infty \end{cases} \tag{14}$$

Aleshores veiem que cal afegir el terme $i\hbar\frac{e}{m_e}\frac{Ba^2}{2\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{e^2}{2m_e}\frac{B^2a^4}{4\rho^2}$ a l'hamiltonià $\hat{\mathcal{H}}_0$ per obtenir l'hamiltonià $\hat{\mathcal{H}}$ del nostre sistema en el cas que el camp magnètic siga diferent de zero dins del forat central del cilindre, on no està el sistema! (notem que la partícula està situada dins de l'interval $a < \rho < \infty$).

Fixem-nos també que si en l'hamiltonià $\hat{\mathcal{H}}_0$ fem el canvi:

$$\frac{\partial}{\partial\phi} \to \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{ie}{\hbar}\frac{B\,a^2}{2} \tag{15}$$

obtenim que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \to -\frac{\hbar^2}{2m_e\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{ie}{\hbar}\frac{B\,a^2}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{ie}{\hbar}\frac{B\,a^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_e\rho^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - \frac{e^2}{\hbar^2}\frac{B^2\,a^4}{4} - \frac{2\,i\,e}{\hbar}\frac{B\,a^2}{2}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m_e\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \left[i\,\hbar\frac{e}{m_e}\frac{B\,a^2}{2\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{e^2}{2m_e}\frac{B^2\,a^4}{4\rho^2}\right] \tag{16}$$

En altres paraules, la introducció del camp magnètic generat pel potencial vector $\vec{A}$ definit en (7) pot implementar-se fent simplement el canvi:

$$\frac{\partial}{\partial\phi} \to \frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{i\,e}{\hbar}\frac{Ba^2}{2} \tag{17}$$

en l'hamiltonià inicial $\hat{\mathcal{H}}_0$.

La separació de variables no es modifica per aquest canvi. Encara és cert que $\Phi(\rho, z, \phi) = R(\rho)\Psi(\phi)Z(z)$, de manera que:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = E_z\,Z(z), \qquad E_z = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{n_z\pi}{L}\right)^2. \tag{18}$$

Comprovem que la funció $e^{im\phi}$ és pròpia de l'operador que substitueix $\hat{L}_z^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ quan hi ha presència de camp:

$$-\hbar^2\left(\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{ie}{\hbar}\frac{Ba^2}{2}\right)^2 e^{im\phi} = \hbar^2\left(m - \frac{e}{\hbar}\frac{Ba^2}{2}\right)^2 e^{im\phi} \tag{19}$$

Aleshores ens adonem que per calcular l'energia, a partir de l'equació diferencial per a la variable ρ, cal fer el canvi:

$$m \to m - \frac{e}{\hbar}\frac{Ba^2}{2} \tag{20}$$

Vol dir açò que malgrat que el camp és zero sobre sistema sota estudi, l'energia canvia! (Efecte Aharonov-Bhom).

Si el camp magnètic és tal que $\frac{eBa^2}{2\hbar} = \pm n$ amb $n = 1, 2, 3, \ldots$, aleshores les funcions d'ona i les energies queden però inalterades. El flux magnètic $\Phi = \int \vec{B}d\vec{S}$ queda en la forma:

$$\Phi = B\pi a^2 = \frac{2\pi\hbar}{e}n = -\Phi_0\,n, \tag{21}$$

on anomenem $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{|e|}$ al quantum de flux. Aleshores, la contribució a l'energia del terme de l'hamiltonià que depen de l'angle ϕ podem escriure'l:

$$\frac{\hbar^2}{2m_e\rho^2}\left(m - \frac{eBa^2}{2\hbar}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m_e\rho^2}\left(m - \frac{\pi a^2\, B}{2\pi\hbar/e}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m_e\rho^2}\left(m + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \tag{22}$$

En termes del flux, el canvi de variable és doncs:

$$\frac{\partial}{\partial\phi} \to \left(\frac{\partial}{\partial\phi} + i\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \tag{23}$$

i l'hamiltonià de rotació que inicialment escriviem $\hat{L}_z^2 = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2$ queda ara:

$$\hat{\mathcal{H}}_{rot}(\phi) = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} + \hbar\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2. \tag{24}$$

A l'article original d'Aharonov i Bhom es descrivia l'efecte que hem introduït an aquestes notes com un canvi de fase en la funció d'ona que donava lloc a efectes observables. Si substituïm $e^{im\phi}$ per $e^{i(m+\frac{\Phi}{\Phi_0})\phi}$ i li apliquem l'hamiltonià original de rotació $\hat{L}_z^2 = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\right)^2$, obtenim:

$$\hat{L}_z^2 e^{i(m-\frac{\Phi}{\Phi_0})\phi} = \hbar^2\left(m + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2. \tag{25}$$

Portant aquest resultat a l'equació diferencial en la variable ρ observem l'esmentat efecte observable en forma de canvi en l'energia.