Tema 12
RADIACIÓ ELECTROMAGNÈTICA EN LA MATERIA.

Josep Planelles
Departament de Química Física i Analítica, Universitat Jaume I,
Apartat 224, E-12080 Castelló, Spain

1 Polarització i camps osci·lants

El medis materials es caracteritzen per ser neutres però presentar un moment dipolar per unitat de volum sota l'acció d'un camp elèctric extern (per inducció i/o orientació de dipols). Anomenem polarització $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ al moment dipolar per unitat de volum. El moment dipolar $d\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r})\, dv$ d'un volum dv generarà un potencial $dV_p(\mathbf{r}')$ en la posició $\mathbf{r}'$ de l'espai:

$$dV_p(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{d\mathbf{p}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dv \tag{1}$$

el potencial generat per tot el volum en un punt $\mathbf{r}$ implicarà la integració sobre tot l'espai,[1]

$$V_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|})dv' \tag{2}$$

Com $\nabla(f\mathbf{A}) = \nabla\mathbf{f}\cdot\mathbf{A} + f\,\nabla\cdot\mathbf{A}$, podem reescriure que

$$V_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\nabla'\left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] dv' \tag{3}$$

Tanmateix, com $\int_S \mathbf{A}d\mathbf{S} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{A}\, dv$, tenim que la integral,

$$\int_V \nabla'\left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dv' = \int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\mathbf{S}' \tag{4}$$

serà zero, si els límits del medi estan a l'infinit, atès que la polaritzabilitat és sempre finita. Per tant,

$$V_p(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \tag{5}$$

amb la qual cosa, $-\nabla\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')$ té sentit de càrrega volumètrica induida. Aleshores, en absència de càrrega externa, tindrem que $\nabla\cdot\mathbf{E} = -\frac{\nabla\cdot\mathbf{P}}{\epsilon_0}$. En general,

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} - \frac{\nabla\cdot\mathbf{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \nabla\cdot(\epsilon_0\,\mathbf{E}+\mathbf{P}) = \rho_{ext} \tag{6}$$

Aleshores, definim el camp de desplaçament elèctric $\mathbf{D} = \epsilon_0\,\mathbf{E} + \mathbf{P}$, de manera que $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_{ext}$.

En general, el desplaçament de la càrrega es pot escriure en termes de sèries de potències del camp aplicat: $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E} + \beta\mathbf{E}^2 + \gamma\mathbf{E}^3 + \ldots$ No obstant això, per a les intensitats de camp normalment utilitzades (10^4 V/cm) les potències superiors poden ser ignorades. L'ús de lasers d'alta potència permet investigar els efectes d'aquest termes (òptica no lineal). Nosaltres ens limitarem en aquest tema a considerar el terme lineal i anomenem *susceptibilitat dielèctrica* χ al factor de proporcionalitat, de manera que escrivim:

$$\mathbf{P} = \chi\epsilon_0\mathbf{E} \tag{7}$$

Aleshores, $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0\,(1+\chi)\,\mathbf{E} = \epsilon\,\mathbf{E}$, on hem definit la permitivitat o constant dielèctrica ϵ del medi.

Ara considerem el cas que el camp elèctric aplicat varie amb el temps. Per a freqüència zero (camp estàtic considerat abans) o freqüències molt baixes, la polaritzció s'ajusta completament al camp instantani aplicat. Per tant,

[1] Noteu el canvi d'etiquetatge: ara anomene $\mathbf{r}'$ a la posició de cada element de volum dv' que genera un potencial en un punt arbitrari $\mathbf{r}$ de l'espai. Noteu també que com hi ha resta $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ tant en numerador com en denominador, no cal que canvie l'ordre.

una susceptibilitat χ real pot descriure el fenomen. Ara be, si la freqüència ω creix, alguns dels tipus de càrrega que contribueixen a $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ no poden seguir el camp elèctric aplicat. Per exemple, si fem créixer la freqüència ω del camp elèctric en un cristall, és esperable que els electrons puguen seguir millor les oscil·lacions d'un camp elèctric d'alta freqüència que els nuclis. Si la freqüència ω és molt elevada, el moviment nuclear esdevindrà molt petit i tant sols els electrons podran ser desplaçats pel camp i contribuir apreciablement a $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ i a χ.

A més, en general, quan el camp varia amb el temps, la resposta $\mathbf{P}$ queda retardada i es produeix un desfase entre la polatizació generada $\mathbf{P}$ i el camp aplicat. Una manera de poder incorporar aquest desfase entre polatizació i camp és mitjantçant una susceptibilitat complexa: $\chi = \chi_0\, e^{i\phi}$. Així per exemple, si el camp és una ona plana $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\, e^{i\,(\mathbf{kr}-\omega t)}$, la polarització que resulta,

$$\mathbf{P} = \chi\,\epsilon_0 \mathbf{E} = \chi_0\,\epsilon_0 \mathbf{E}_0 e^{i\,(\mathbf{kr}-\omega t+\phi)} = \mathbf{P}_0\, e^{i\,(\mathbf{kr}-\omega t+\phi)} \tag{8}$$

ve representada per una altra ona plana desfasada. Si escrivim $\mathbf{P} = \epsilon_0\,(\chi_1 + i\,\chi_2)\,\mathbf{E}$, observem que un part de la polarització $\chi_1\,\epsilon_0\,\mathbf{E}$ va en fase amb el camp, mentre que un altra $\chi_2\,\epsilon_0\,\mathbf{E}$ presenta un desfase $\pi/2$.

Cal aclarir que malgrat que resulta cómode, pels motius esmentats, escriure els camps com magnitud complexes, la veritat és que els camps són observables i, per tant, són reals: *són la part real de les magnitud complexes utilitzades per a descriure'ls.* Per exemple, la densitat d'energia associada amb una ona plana $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\, e^{i\,(\mathbf{kr}-\omega t)}$ no és $\mathbf{E}_0^2$ sinó $\mathbf{E}_0^2 \cos^2(\mathbf{kr} - \omega t)$, és a dir, el quadrat de la part real. Així la mitjana temporal $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ no és $\mathbf{E}_0^2$ sinó $\mathbf{E}_0^2/2$. En efecte,

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{E}^2 dt = \frac{\mathbf{E}_0^2}{T}\int_0^T \cos^2(\mathbf{kr}-\omega t)\,dt = \frac{\mathbf{E}_0^2}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\,\mathbf{kr}-2\,\omega t)\right)dt = \frac{\mathbf{E}_0^2}{T}\,\frac{1}{2}\,T = \frac{\mathbf{E}_0^2}{2}. \tag{9}$$

Cal aclarir també que mentre que camp $\mathbf{E}$ i polarització $\mathbf{P}$ són observables físics, la susceptibilitat χ i la permitivitat ϵ no ho són. Aquestes magnitud representen la relació entre dos observables físics i descriuen la magnitud i la fase d'un en comparació a l'altre. Per tant, tant la part real com la part imaginària d'aquestes magnituds tenen sentit físic.

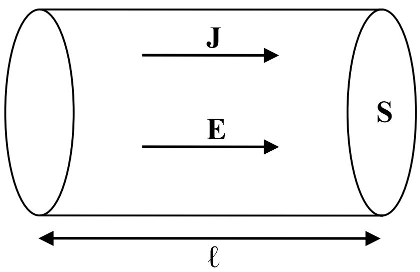

Figure 1: Densitat de corrent i camp elèctric en un cilindre

La resposta retardada de la polarització és similar a la que succeix amb la densitat de corrent $\mathbf{J}$. Considerem un cilindre de longitud ℓ i secció $\mathbf{S}$, vegeu figura 1, per la que circula una intensitat I, que pot expressar-se com $I = \mathbf{J}\cdot\mathbf{S}$.

La llei de Ohm diu que $I = V/R$, per tant tenim que $\mathbf{J}\cdot\mathbf{S} = \frac{V}{R} = \frac{|\mathbf{E}|\,\ell}{R}$ i, aleshores, $\mathbf{J} = \frac{\ell}{|\mathbf{S}|\,R}\,\mathbf{E} = \sigma\,\mathbf{E}$, on σ és anomenada conductivitat.

Doncs be, de manera semblant a la polarització, la densitat de corrent produida per un camp oscil·lant pot anar desfasada del camp. Escrivim $\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E} = (\sigma_1 + i\,\sigma_2)\,\mathbf{E}$.

Cal aclarir que fins i tot en absència de càrregues lliures, la presència d'un camp oscil·lant que provoca una polarització de la matèria que varia en el temps, genera moviment de càrregues i, per tant, densitat de corrent. En efecte, imaginem que hi ha N dipols $\mathbf{p}_i$ per unitat de volum, de manera que la polarització resulta $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$. Imaginem que en un temps dt, $\mathbf{p}_i$ canvia a $\mathbf{p}_i + d\mathbf{p}_i$. Imaginem que $d\mathbf{p}_i$ s'origina en moure's una càrrega q_i una distància $d\mathbf{r}_i$: $d\mathbf{p}_i = q_i\, d\mathbf{r}_i$. Aleshores,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i q_i\,\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_i q_i \mathbf{v}_i = \mathbf{J} \tag{10}$$

i.e., durant el temps dt, el núvol de càrrega $\sum_i \mathbf{p}_i$ s'ha mogut originant una densitat $\mathbf{J}$.

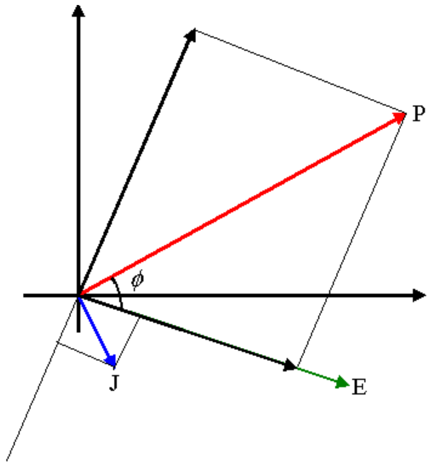

Figure 2: Desfase polarització densitat de corrent i camp elèctric

Si un camp $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \, e^{i\,(\mathbf{kr}-\omega t)}$ genera una polarització $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \, e^{i\,(\mathbf{kr}-\omega t+\phi)}$ aleshores,

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = -i\,\omega\,\mathbf{P} = -i\,\omega\,\chi\,\epsilon_0\,\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E} \tag{11}$$

Per tant,

$$-i\,\omega\,(\chi_1 + i\,\chi_2)\,\epsilon_0 = \sigma_1 + i\,\sigma_2 \tag{12}$$

$$\rightarrow \epsilon_0\,(\omega\,\chi_2 - i\,\omega\,\chi_1) = \sigma_1 + i\,\sigma_2 \tag{13}$$

amb la qual cosa $\sigma_1 = \omega\,\chi_2\,\epsilon_0$ i $\sigma_2 = -\omega\,\chi_1\,\epsilon_0$. Podem descriure la densitat de corrent com una superposició de corrent en fase i un altra corrent defasada $\pi/2$.

De les expressions anteriors concloem també quem la polarització presenta un desfase ϕ amb el camp i un desfase $\pi/2$ amb la densitat de corrent (notem que $i = e^{i\,\frac{\pi}{2}}$).

2 Model de resposta: oscil·lador hàrmonic amortit (oscil·lador de Lorentz)

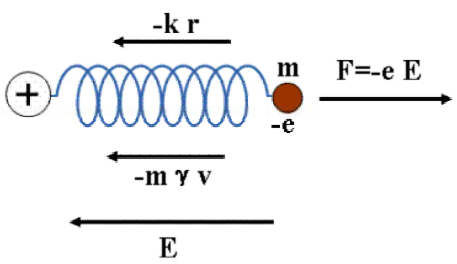

Figure 3: Oscil·lador de Lorentz

El model més simple per estudiar la variació de la polarització provocada per un camp elèctric oscil·lant és l'oscil·lador de Lorentz: un electró que sent l'atracció del core de manera elàstica ($F = -m\,\omega_0^2 r$) i que veu frenat el moviment per una força de fregament (per tant, proporcional a la velocitat: $F = -m\,\gamma\,\dot{r}$) força aquesta originada per la interacció amb els altres electrons i cores nuclears.

Escrivim l'equilibri de forces en presència de camp ($E = \tilde{E}_0\,e^{i\,(\mathbf{kr}-\omega t)} = E_0\,e^{-i\,\omega t}$):

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2} + m\,\gamma\,\frac{dr}{dt} + m\,\omega_0^2\,r = -e\,E_0\,e^{-i\,\omega t} \tag{14}$$

El moviment de l'electró haurà de tenir una mateixa freqüència que el camp (independentment del possible desfase). Per tant, comprovarem que $r = r_0\,e^{-i\omega\,t}$ és solució de l'equació diferencial 14. Tenim que si $r = r_0\,e^{-i\omega\,t}$, aleshores, $\dot{r} = -i\,\omega\,r$ i $\ddot{r} = -\omega^2\,r$. Tanmateix, des de $r = r_0\,e^{-i\omega\,t}$ podem substituir $e^{-i\omega\,t}$ per r/r_0. Amb açò l'equació 14 es converteix en:

$$m\,(-\omega^2\,r) + m\,\gamma\,(-i\,\omega)r + m\,\omega_0^2\,r = -e\,E_0\,\frac{r}{r_0} \tag{15}$$

Amb la qual cosa,

$$r_0 = \frac{-e\,E_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\,\gamma\,\omega}, \qquad r = r_0\,e^{-i\omega\,t} \tag{16}$$

Si escrivim la polarització $\mathbf{P} = \frac{N}{V}\mathbf{p} = \frac{N}{V}\,q\,\mathbf{r}$, amb $q = -e$ i $\epsilon = \epsilon_0\,(1+\chi)$, trobem que:

$$\mathbf{P} = \frac{\big(e^2\,N/(m\,V)\big)\,\mathbf{E}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\,\gamma\,\omega} = \chi\,\epsilon_0\,\mathbf{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\,\mathbf{E} \tag{17}$$

d'on deduïm que la constant dielèctrica (*imaginària*) és:

$$\epsilon = \epsilon_0\left[1 + \left(\frac{e^2\,N}{m\,V\epsilon_0}\right)\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\,\gamma\,\omega}\right] \tag{18}$$

Si escrivim $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r = \epsilon_1 + i\,\epsilon_2$ trobem que:

$$\epsilon_r = 1 + \left(\frac{e^2\,N}{m\,V\epsilon_0}\right)\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\,\gamma\,\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\,\omega^2} \tag{19}$$

i trobem així les parts, real i imaginària, de ϵ_r:

$$\epsilon_1 = 1 + \left(\frac{e^2 N}{m V \epsilon_0}\right) \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \tag{20}$$

$$\epsilon_2 = \left(\frac{e^2 N}{m V \epsilon_0}\right) \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \tag{21}$$

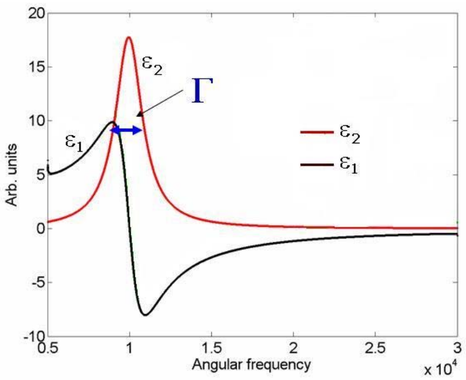

Figure 4: Part real i imaginària de la constant dielèctrica

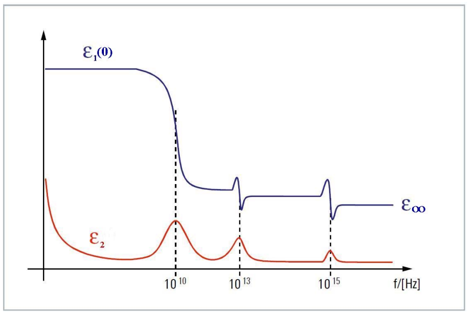

Figure 5: Part real i imaginària de la constant dielèctrica vs. la freqüència

Podem completar el model substituint el valor 1 en la fórmula de ϵ_r per ϵ_∞. Aquest canvi inclou la consideració que en el medi hi hagi altres oscil·ladors amb una freqüència ω_0' de ressonància molt major que la regió de freqüències ω estudiada, de manera que encara queden modes normals en la matèria sensibles al camp i que, per tant, apantallen amb $\epsilon_\infty > 1$. Tanmateix, podem incorporar diversos tipos d'oscil·ladors afegint el corresponent terme en la suma, de manera que:

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty + \sum_j \left(\frac{e^2 N_j}{m V \epsilon_0}\right) \frac{1}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - i \gamma_j \omega} \tag{22}$$

Per tant, les part real i imaginaria són:

$$\epsilon_1 = \epsilon_\infty + \sum_j \mathcal{N}_j \frac{\omega_{0j}^2 - \omega^2}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \tag{23}$$

$$\epsilon_2 = \sum_j \mathcal{N}_j \frac{\gamma_j \omega}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \tag{24}$$

Si $\omega \to \infty$, aleshores $\epsilon_1 \to \epsilon_\infty = \epsilon_{dinàmica}$.
Si $\omega \to 0$, aleshores $\epsilon_1 \to \epsilon_\infty + \frac{\mathcal{N}}{\omega_0^2} = \epsilon_{estàtica} = \epsilon_s$.

La ϵ_r finalment sol ser reescrita en la forma,

$$\epsilon_r = \epsilon_\infty + \left(\frac{e^2 N}{m V \epsilon_0}\right) \sum_j \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2) - i \gamma_j \omega} \tag{25}$$

on f_j s'anomena força d'osci·lador de la ressonància ω_{0j}.

3 Índex de refracció complex

Considerem un medi no magnètic i elèctricament neutre. Aleshores, tant la densitat de càrrega lliure con la magnetització són zero i $\mu = \mu_0$. Sota aquestes hipòtesis les equacions de Maxwell se poden escriure:

1. Llei de Gauss: $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}$ que equival a $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$.
   En la primera de les equacions interpretem el medi com un buit més un conjunt de càrregues de polarització.

2. Absència de monopols magnètics: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

3. Llei de la inducció: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

4. Llei de Faraday amb polarització: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_p = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}\right) = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.
   També ací afegim la corrent de polarització substituint el medi. En el darrer pas s'ha tingut en compte que $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$.

Si a més, el medi és homogeni i isòtrop, aleshores $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ amb ϵ constant. Aleshores, des que $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, se segueix que també $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, i des de la identitat vectorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, trobem que $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E}$. Per tant, si apliquen el rotacional a la tercera llei: $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$ i substituïm el camp magnètic des de la quarta, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, trobem que:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{26}$$

que és equivalent a

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \right) \tag{27}$$

L'índex de refracció $n^2 = \frac{\mu_0 \epsilon}{\mu_0 \epsilon_0} = \epsilon_r$. Per tant, des de l'equació 18,

$$n^2 = \epsilon_r = \epsilon_1 + i\,\epsilon_2 = \left[1 + \left(\frac{e^2\,N}{m\,V \epsilon_0} \right) \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - \,i\,\gamma\,\omega} \right] = (n_1 + i\,n_2)^2 = n_1^2 - n_2^2 + i\,(2\,n_1\,n_2) \tag{28}$$

on identifiquem que $\epsilon_1 = n_1^2 - n_2^2$ i $\epsilon_2 = 2\,n_1\,n_2$. Aleshores,

$$n_1^2 = 1/2 \left[\epsilon_1 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} \right] \tag{29}$$

$$n_2^2 = 1/2 \left[-\epsilon_1 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} \right] \tag{30}$$

Si escrivim $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\, e^{i\,(\mathbf{kr} - \omega t)}$ i $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\, e^{i\,(\mathbf{kr} - \omega t)}$, la tercera i quarta llei de Maxwell, tenint en compte que si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0\, e^{i\,(\mathbf{kr} - \omega t)}$, aleshores $\nabla \times \mathbf{A} = i\,\mathbf{k} \times \mathbf{A}$, donen lloc a:

$$i\,\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -i\,\omega\,\mathbf{B} \tag{31}$$

$$i\,\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\,\mu_0\,\epsilon\,\omega\,\mathbf{E} \tag{32}$$

Considerem la identitat vectorial $\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{k}\,(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\,\mathbf{E} = 0 - k^2\,\mathbf{E}$. Aleshores, tenim que $k^2\,\mathbf{E} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{B} = \omega^2\,\mu_0\,\epsilon\,\mathbf{E}$, per tant:

$$k^2 = \omega^2\,\mu_0\,\epsilon = \omega^2\,\mu_0\,\epsilon_0 \epsilon_r = \omega^2\,\mu_0\,\epsilon_0\,n^2 = \frac{n^2\,\omega^2}{c^2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\omega}{c}\,n \tag{33}$$

Si considerem la part del camp de depen de les coordenades, $e^{i\,k\,z} = e^{i\,\omega\,n_1\,z/c}\; e^{-\,\omega\,n_2\,z/c}$, trobem que la component imaginària de l'índex de refracció n_2 determina el decaiment de l'ona, mentre que la part real n_1 determina la velocitat de fase.

4 Polaritons

La relació $\mathbf{P} = \chi(\omega)\,\epsilon_0\,\mathbf{E} = \epsilon_0\,(\epsilon_r(\omega) - 1)\,\mathbf{E}$ entre el camp elèctric i polarització de la matèria fa que, en la matèria, el camp elèctric vaja sempre acompanyat d'una ona de polarització, de manera que la llum que travessa un sòlid és sempre una superposició d'una ona electromagnètica i una ona mecànica de polarització. Aquesta ona mesclada electromagnètica i de polarització està quantificada, com veurem després, en el sentit d'intercanviar energia amb altres sistemes, com ara el camp de fotons en el buit, en paquets d'energia que són múltiples de $\hbar\omega$. *S'anomena polaritó a aquest quanta d'energia* (en analogia al quanta d'energia electromagnètica en el buit que anomenem fotó). El nom de polaritó està compost de polarització + fotó, que és la manera més directa de descriure un polaritó.

Les ones de polarització inclouen moviments relatius de uns ions de la xarxa d'un semiconductor respecte d'altres ions (fonons), sistemes de dos partícules, com ara parells electró-forat (excitó) o moviments col·lectius del núvol electrònic respecte dels nuclis i les capes internes més o menys rígides d'electrons (plasmó). També aquestes excitacions, de manera semblant al cas dels fotons, poden ser quantificades per a formar *quasipartícules* amb energia $\hbar\omega$ i moment $\hbar\mathbf{k}$.

El motiu de l'atribut *quasi* és doble. A diferència de les partícules *"reals"*, com ara fotons, electrons o protons, les quasipartícules únicament poden existir en la matèria i no en el buit. Per una altra banda, el seu quasimoment $\hbar\mathbf{k}$ està limitat a la primera zona de Brillouin o, el que és el mateix, està definit mòdul múltiples enters del vector unitari de translació de la xarxa recíproca del sòlid ordenat.

Amb aquestes consideracions, podem descriure la propagació de llum en la matèria com una mescla de fotons i altres quasipartícules que descriuen el quanta del camp de polarització, amb un aspecte a subratllar: és l'estat de la mescla allò que està quantificat, no els seus components.

Podem usar el model mecànic de l'ona electromagnètica que excita oscil·ladors per entendre la formació del polaritó: la llum provoca l'oscil·lació, cosa que origina una polarització, la qual irradia una ona electromagnètica. Aquesta torna a excitar els oscil·ladors, etc. etc.

Des del punt de vista mecanoquàntic, el camp fotònic queda descrit per l'hamiltonià

$$\hat{\mathcal{H}}_F = \sum_k \hbar\, \omega_k\, a_k^+\, a_k, \tag{34}$$

on el producte creador a_k^+ aniquilador a_k representa l'operador número de fotons.

Anàlogament, l'hamiltonià de l'altra quasipartícula serà:

$$\hat{\mathcal{H}}_P = \sum_{k'} E(k') B_{k'}^+\, B_{k'}, \tag{35}$$

on $E(k')$ no necessàriament ha de tenir la mateixa fórmula $E = \hbar\omega$ que els fotons.

Finalment, podem escriure un tercer terme per a la interacció entre els dos tipus de partícules:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = \sum_k g_k (B_k^+\, a_k + a_k^+\, B_k), \tag{36}$$

el primer terme de la qual representa l'aniquilació d'un fotó (a_k) i la creació d'una quasipartícula (B_k^+) amb conservació de moment ($k = k'$), i el segon terme el cas contrari. El quoficient g_k representa la integral o matriu de transició. Si considerem $\mathcal{H}_{int}$ com una pertorbació, amb ell calcularíem les probabilitats o matrius de transició.

El punt crucial és que l'hamiltonià complet,

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_F + \hat{\mathcal{H}}_P + \hat{\mathcal{H}}_{int} \tag{37}$$

pot ser diagonalitzat mitjançant apropiades combinacions lineals p_k d'operadros de creacció/aniquilació de fotons i de les quasipartícules que representen la matèria:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k E_k\, p_k^+\, p_k \tag{38}$$

amb $p_k = u_k\, B_k + v_k\, a_k$, on u_k i v_k són quoficients de la combinació lineal.

A la vista de l'hamiltonià 38, p_k^+, p_k són creadors i aniquiladors de quantes d'estats mesclats fotó-ona-de-polarització, amb una quasivector d'ona $\mathbf{k}$, que anomenem polaritons. $E(\mathbf{k})$ és la seua energia i relació de dispersió.

5 Relació de dispersió del polaritons

La relació de dispersió $E(k)$ per al cas dels fotons és molt simple: $= \hbar\, \omega = h \frac{c}{\lambda} = \hbar\, ck$. Així doncs, la relació de dispersió $E(k)$ $[\omega(k)]$ és una línia de pendent $\hbar c$ $[c]$.

Procedim obtenir la relació $\omega(k)$ d'un polaritó a partir de la física clàssica (perquè aquest resultat coincideix amb el que deriva del tractament mecanoquàntic). Partim de la relació entre vector d'ona i índex de refracció que havíem deduit abans, $k = \frac{\omega}{c}\, n$, amb $n^2 = \epsilon_r(\omega)$. Per tant, $c^2\, k^2 = \omega^2 \epsilon_r(\omega)$. Considerem el model,

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\, \gamma\, \omega} \tag{39}$$

es tracta de representar $\omega(k)$. Escrivim:

$$c^2\,k^2 = \left(\epsilon_\infty + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\,\gamma\,\omega}\right)\omega^2 \tag{40}$$

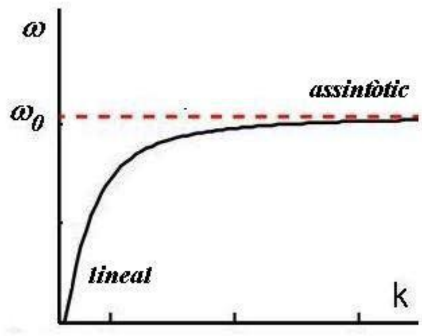

Figure 6: Dispersió $\omega(k)$

Per facilitar les coses, considerem el cas de poc amortiment ($\gamma \to 0$). Estudiem els comportament asimptòtics:

- $\omega << \omega_0$: Aleshores $\omega_0^2 - \omega^2 \approx \omega_0^2$ i $c^2\,k^2 \approx \left(\epsilon_\infty + \frac{f}{\omega_0^2}\right)\omega^2 = \epsilon_s\,\omega^2$. Per tant, $\omega \approx \frac{c}{\epsilon_s^{1/2}}\,k$. La relació $\omega(k)$ és lineal amb pendent $c/\sqrt{\epsilon_s}$.

- $\omega \approx \omega_0$ ($\omega < \omega_0$): Aleshores rebutgem ϵ_∞ enfront de la fracció $\frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}$ i tenim que:

$$c^2\,k^2 \approx \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}\,\omega^2 = \frac{f}{(\omega_0/\omega)^2-1}$$
$$\to \qquad \omega = \omega_0/\sqrt{1+\frac{f}{c^2\,k^2}}.$$

Si $k \to \infty$, aleshores $\omega \to \omega_0$. Vegeu la Figura 6.

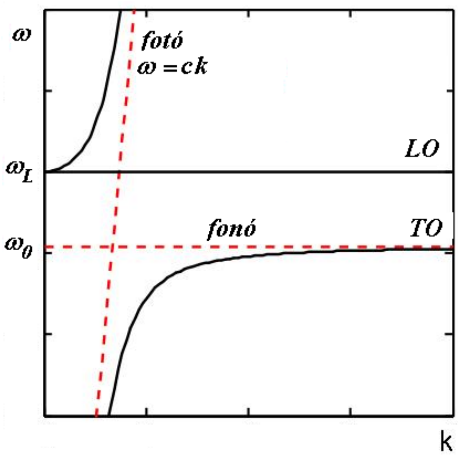

Figure 7: Dispersio del Polaritó

Abans de continuar tornem sobre la fórmula de $\epsilon_r(\omega)$, eq. 40, particularitzada per al cas estudiat de poc amortiment ($\gamma \to 0$) que queda transforma simplement en:

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{41}$$

Hi ha una freqüència ω_L per a la qual $\epsilon_r(\omega_L) = 0$. Des de l'equació 41 trobem que $\epsilon_\infty = -\frac{f}{\omega_0^2-\omega_L^2}$ que equival a dir que:

$$\omega_L^2 = \omega_0^2 + \frac{f}{\epsilon_\infty}. \tag{42}$$

Per una altra banda, fent $\omega = 0$ en l'eq. 39 trobem ϵ_s, i.e., $\epsilon_s = \epsilon_\infty + \frac{f}{\omega_0^2}$. Portant aquesta equació a l'equació 42 concloem que:

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_\infty} = \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} > 0 \qquad \to \qquad \omega_L > \omega_0. \tag{43}$$

Si $\omega_L = \omega_0$, aleshores $\epsilon_r(\omega_L) = 0$ i $c^2\,k^2 = 0 \cdot \omega_L^2 = 0$, d'on se deriva que $k = 0$. És a dir, la freqüència ω_L ($> \omega_0$) implica $k = 0$ i representa, per tant, el que sembla l'inici d'una segona banda en el diagrama $\omega(k)$. Considerem doncs una freqüència $\omega >> \omega_L > \omega_0$. Aleshores aproximem $\omega_0^2 - \omega^2 \approx -\omega^2$. Per tant,

$$c^2\,k^2 = \left(\epsilon_\infty - \frac{f}{\omega^2}\right)\omega^2 = \epsilon_\infty\,\omega^2 - f \approx \epsilon_\infty\,\omega^2 \quad \to \quad \omega = \frac{c}{\epsilon_\infty^{1/2}}\,k \tag{44}$$

Trobem de nou una relació lineal, però com $\epsilon_s > \epsilon_\infty$, la pendent ara és major. La regió $\omega \approx \omega_L > \omega_0$, on no rebutgem ω_0, presentarà una menor pendent -com en el cas anterior, en la transició del règim linear a l'assimptòtic. En conjunt trobem la dispersió que indica la figura 7.

La relació de dispersió trobada per al polaritó té la pinta d'un creuament mecanoquàntic evitat. Podem imaginar tres partícules no interactuants, un fotó $\omega = c\,k$ i dos modes normals de vibració (fonons), un longitudinal (ω_L) i un transversal, de menor freqüència ω_0. Per al problema no acoblat les dispersions $\omega(k)$ de les vibracions creuen la dispersió del camp electromagnètic. Ara bé, aquestes ones s'acoblen de manera esencial en el polaritó, de manera que les energies s'anticreuen (vegeu Fig. 7).