# 1 Moviment ondulatori

Ara realitzarem un breu repàs del moviment ondulatori[1]. Considerem el desplaçament d'una onada que ha estat produída en un estany pel llançament d'una pedra. Adonem-nos que hi ha un doble moviment ondulatori. Per una banda, si fixem la nostra vista en una petita àrea de l'estany i l'observem durant un cert temps, veiem que la superfície d'aigua puja i baixa periòdicament. Podem representar l'altura d'aquesta superfície enfront del temps. Obtenim una corba cosinoïdal, $f(t) = A \cos \omega t$, en cas que el moviment siga harmònic simple i sense amortiment (és a dir, sense disipació d'energia)(Figura 1a).

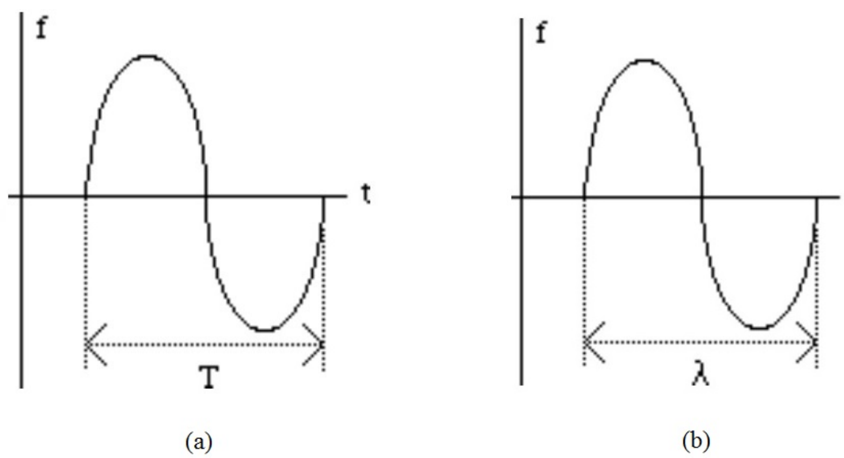


Figure 1: Moviment harmònic simple: (a) amplitud enfront de temps. (b) amplitud enfront d'espai

Per una altra banda podem contemplar globalment l'estany en un instant de temps. Veiem una ondulació que s'esten des del punt on es va produir l'impacte de la pedra fins als límits de l'estany. Tenim també una corba cosinoïdal. Ara, però, l'altura, o amplitud, és representada enfront de la distancia $x$ que hi ha des del punt considerat al punt d'impacte de la pedra: $f(x) = A \cos kx$ (Figura 1b).

Conjuntament, el que veiem és la variació de l'amplitud del moviment enfront de l'espai

[1] No és una qüestió senzilla donar una definició simple d'ona basant-nos en conceptes purament físics. Matemàticament, un camp $f$ es propaga com una ona sense distorsió si dóna compliment a l'anomenada equació de D'Alembert,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

on $v$ s'anomena velocitat de fase. Cal fer notar que $v$ pot ser funció de les coordenades espacials (ona que es propaga en un medi no homogeni). La velocitat de propagació d'un determinat camp en un medi homogeni és única, independentment de característiques específiques del moviment. Així, el so viatja a 340 m/s en aire a la pressió d'una atmosfera i $25^o$C de temperatura, la llum a la velocitat $c$ en el buit, etc.

i el temps.

Tornem sobre l'exemple ideal considerat del moviment harmònic simple sense amortiment. En aquest model, el moviment no és altra cosa que un allunyament d'ones *rígides* des del centre de la pertorbació (punt d'impacte de la pedra) fins als límits de l'estany.

A la Figura 2 mostrem dos punts amb distintes coordenades espacio-temporals però amb igual amplitud $f$. Sense menyscabament de generalitat assumirem, per senzillesa, que $t_0 = 0$. Com $x_0 = x - \Delta x$,tenim que:

$$f(x - \Delta x, t_0 = 0) = f(x, t) \tag{1}$$

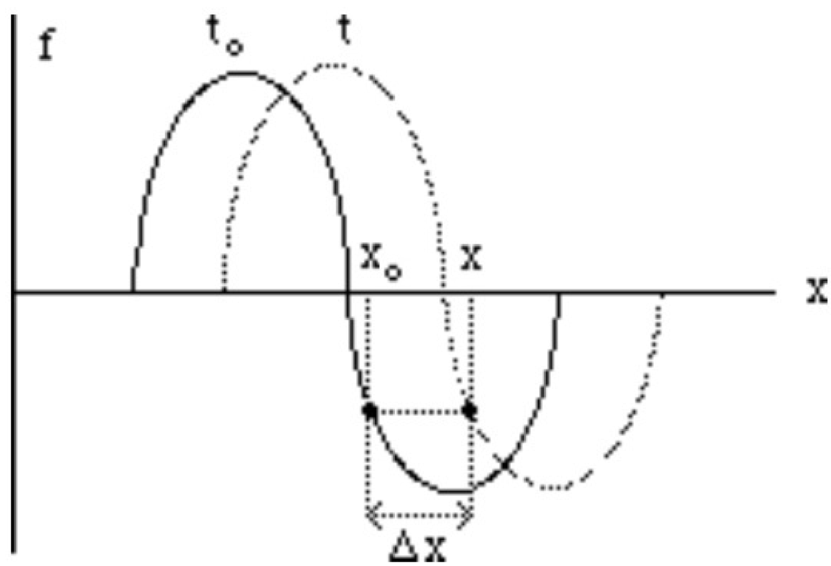


Figure 2: Moviment oscil·latòri harmònic no amortit

Anomenem $v$ la velocitat de desplaçament del moviment oscil·latori. Tenim que:

$$\Delta x = vt \tag{2}$$

Si particularitzem l'equació per a $\Delta x = \lambda$, i, en conseqüència, $t = T$, tenim que $v = \frac{\lambda}{T}$. Per substitució en l'equació (2) obtenim que $\Delta x = \lambda \frac{t}{T}$. És convenient introduir les següents definicions: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ i $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

La particularització de l'equació (1) en el model considerat (moviment harmònic simple), el qual presenta una relació funcional de tipus circular, condueix a :

$$f(x,t) = f(x - \Delta x, 0) = A\cos k(x - \Delta x) = A\cos(kx - k\frac{2\pi}{k}\frac{t}{T}) = A\cos(kx - \omega t) \tag{3}$$

Anomenem *fase* a l'argument de la funció, és a dir, a la quantitat $\varphi(x,t) = kx - \omega t$.

Si l'ona viatga cap a l'esquerra, aleshores, $x_0 = x + \Delta x$ i, per tant,

$$f(x,t) = f(x + \Delta x, 0) = A \cos k(x + \Delta x) = A \cos(kx + k\frac{2\pi}{k}\frac{t}{T}) = A \cos(kx + \omega t) \quad (4)$$

Sovint, el que la nostra vista realment fa, en contemplar les ones d'un estany, és seguir el moviment de la cresta de l'onada. És a dir, el que fa és contemplar *punts de l'espai-temps* de fase $\varphi(x,t)$ constant. I quan parlem de velocitat de desplaçament de l'ona ens referim a la velocitat de desplaçament de la cresta de l'onada. La condició de *cresta d'onada* es correspon amb la condició de *fase constant*, és a dir, es correspon amb la condició $d\varphi(x,t) = 0$. Com que $k$ i $T$ són constants, aquesta condició es tradueix en el fet que $\omega dt - kdx = 0$. En altres paraules, que la velocitat de desplaçament de l'onada $v_\varphi$ val:

$$v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = v. \quad (5)$$

Fixem-nos que $f(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ dóna compliment a l'equació del moviment ondulatori, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, des de la qual és immediat que $v = \omega/k$.

## 1.1 Ones estacionàris

En la subsecció anterior hem considerat el cas més general d'ona. Ara considerem un cas concret d'especial interès: el moviment estacionari. Estem interessats a abordar problemes com ara el de la descripció de les òrbites estacionàries de l'àtom d'hidrogen on la hipòtesi de De Broglie proporcionà una imatge i interpretació d'allò més encertada.

Les vibracions de cordes de violins en poden servir per a recordar algunes de les característiques dels moviments macroscòpics estacionaris. Com es produeixen aquests moviments estacionaris? Quan una ona viatja sobre una corda i s'aproxima a un punt en el qual l'esmentada corda està subjecta rígidament a un suport, succeeix que el suport produeix forces de reacció sobre la corda com a resposta a l'ona incident. Aquestes forces varien, doncs, periòdicament i generen una segona ona (ona reflectada) idèntica a l'ona incident però que es propaga en direcció oposada. Si el moviment és estacionari, com és el cas de la corda de violí que està emetent una nota musical continuada, totes dues ones hi són permanentment presents, superposades, creant una sèrie de *nodes* (punts d'amplitud zero) i *antinodes* (punts d'amplitd màxima) que estan fixos en l'espai i el temps. Com no hi ha amortiment, les amplituds també són fixes i, aleshores, l'energia vibracional $E_i$ de les particules oscil·lants de la corda és constant ($E_i = 1/2ka_i^2$, on $a_i$ és l'amplitud de la i-èsima particula oscil·lant), com també ho és l'energia del moviment estacionari global.

Podem contemplar, doncs, el moviment ondulatori estacionari com la superposició de dues ones idèntiques $f_+$ i $f_-$ que viatgen en direccions oposades (ona incident i ona reflectida, Figura 3).

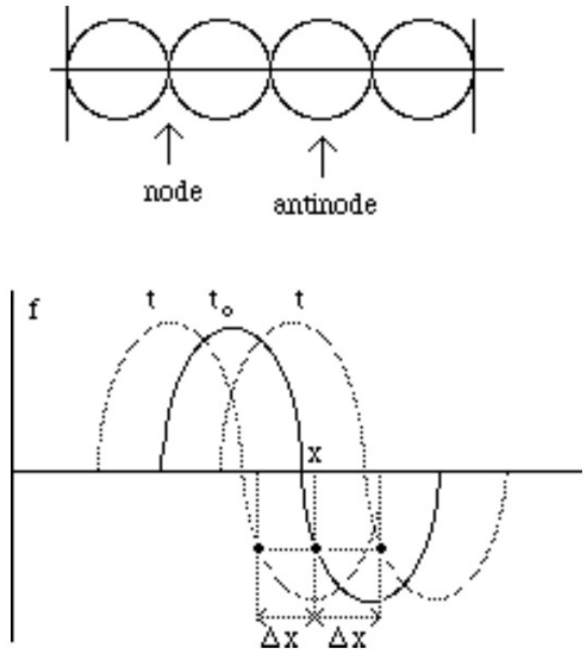


Figure 3: (a) Moviment ondulatori estacionari. (b) Ona incident i ona reflectida.

Si considerem moviments harmònics, i.e., relacions de tipus circular ($f = A \cos kx$), podem escriure[2]:

$$f_+(x,t) = A\cos(kx - \omega t), \tag{6}$$

$$f_-(x,t) = A\cos(kx + \omega t). \tag{7}$$

La superposició de les dues ones dóna lloc a l'ona estacionària, l'amplitud de la qual podem escriure com:

$$\psi(x,t) = A\cos(kx + \omega t) + A\cos(kx - \omega t) \tag{8}$$

Recordant que $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$, i que, aleshores, $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$, tenim que l'amplitud del moviment global està factoritzada com a producte d'una funció de l'espai multiplicada per una funció del temps:

$$\psi(x,t) = 2A\cos kx \cos \omega t \tag{9}$$

[2] Fixem-nos que des de la constància de la fase $\varphi_+ = kx - \omega t$ deduïm que $v_+ = \omega/k > 0$, mentre que de la constància de la fase $\varphi_- = kx + \omega t$ deduïm $v_- = -v_+ = -\omega/k < 0$, cosa que evidència el sentit contrari del moviment de les dues ones, que, excepte en açò, són idèntiques (mateixa amplitud i tipus de relació funcional).

En altres paraules, no es tracta d'una ona progressiva, sinó d'una ona que presenta un patró estacionari amb *nodes* i *antinodes* en posicions fixes, la qual cosa deriva de la factorització esmentada.

La forma més general de moviment ondulatori estacionari és aquell en el qual la configuració espacial de l'amplitud en qualsevol instant donat es reprodueix exactament a intervals constants de temps. Això significa, com acabem d'exemplificar, que l'amplitud, com una funció de l'espai i el temps, es pot factoritzar com producte d'una funció espacial per una funció temporal periòdica. L'equació més general d'aquest tipus que podem proposar és:

$$\psi(x,t) = f(x)g(t) \tag{10}$$