Camp i flux magnètic

J. Planelles
(Dated: September 7, 2011)

I. INTRODUCTION

Imaginem que una partícula amb càrrega q circula sense fricció al llarg d'un anell. Suposem que l'anell està situat entre els dos pols d'un iman (vegeu Fig. 1 esquerra), cosa que genera un camp magnètic axial. Imaginem un camp estàtic uniforme. Com el camp és axial, es genera una força magnètica perpendicular a la velocitat (vegeu Fig. 1 dreta) i, per tant, perpendicular al desplaçament. Aquesta força exerceix un treball nul sobre la càrrega en moviment $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ perquè $\vec{F}$ i $d\vec{r}$ són perpendiculars. Per això, en presència d'un camp magnètic, l'energia cinètica és una constant de moviment.

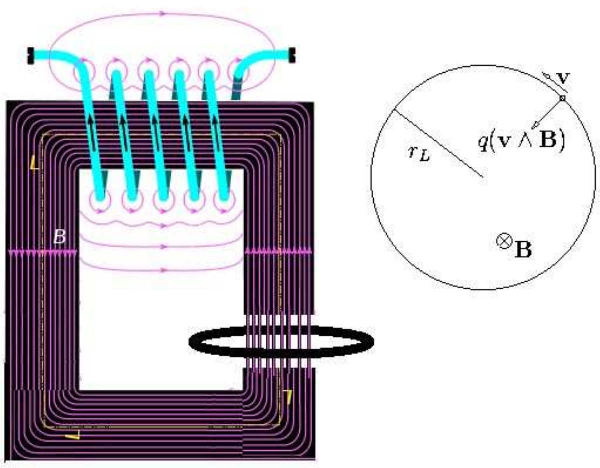

FIG. 1: Càrrega que és mou en un anell sotmés a un camp magnètic axial.

Podem veure-ho d'una altra forma: la derivada temporal de l'energia cinètica, $T = \frac{1}{2}mv^2$, és:

$$\frac{dT}{dt} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1}$$

si la força que fa variar la velocitat és la força magnètica, $\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$, aquesta proporciona una acceleració $\vec{F}/m = (q/m)(\vec{v} \wedge \vec{B})$ perpendicular a la velocitat $\vec{v}$, i per tant $\vec{v} \cdot d\vec{v} = 0$, i.e., $dT = 0$, i, per tant, T és constant.
Ara imaginem que la corrent per la bobina del electroimant és inicialment zero, per tant el camp magnètic generat també és zero en aquest instant inicial. Tot seguit fem créixer la intensitat i per tant el camp magnètic generat. Obtenim així un camp axial (i un flux a través de l'anell) variable en el temps.
Experimentalment (llei de Faraday) sabem que la variació de flux a través d'un circuit tancat genera una força electromotriu f.e.m. i un corrent elèctric en el circuit. Recordem que el treball que cal fer per a moure una unitat de càrrega al llarg d'un camí L és $\int_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, i que si la trajectòria és tancada, a la circulació $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ se l'anomena força electromotriu $\in$ i representa el treball que cal fer per moure una càrrega unitat a través del circuit. Fixem-nos que els camps elèctrics estacionaris poden ser expressats com el gradient d'un potencial, $\vec{E} = -\nabla V$. Per tant, en aquest cas, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\oint \vec{\nabla} V \cdot d\vec{\ell} = \oint dV = 0$. És a dir, un camp elèctric estacionari no pot mantenir un corrent elèctric en un circuit tancat. Cal dotar el circuit d'una f.e.m. $\in$ proporcionada per una generador elèctric extern. Alternativament, una variació de flux a través del circuit fa, d'acord amb la llei de Faraday, aquest mateix paper: $\in = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$. La variació de flux produeix la força electromotriu perquè genera un camp elèctric tangencial (que no és expressable com el menys gradient de cap potencial). Si inicialment la intensitat en el circuit és zero, la variació de flux que genera un camp elèctric tangencial fa moure les càrregues en repòs i genera una corrent induïda (aquest és precisament el fonament de la dinamo d'una bicicleta).
Fixem-nos que mentre que el camp magnètic estàtic no realitza treball sobre les càrregues en moviment (per ser la força perpendicular a la velocitat), la variació de camp genera variació del flux i aquest genera un camp elèctric tangencial i per tant una força que va en la direcció del desplaçament i, en conseqüència si que realitza treball (l'anomenada força electromotriu).
Si escrivim $\in = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$ i tenim en compte que la espira és perfectament circular, aleshores, per qüestió de simetria, el camp serà igual en mòdul en qualsevol lloc del circuit. Per tant, $E\,2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt}$ i

$$E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi}{dt} \tag{2}$$

En resum, si inicialment tenim un anell amb càrregues en repòs, situat entre els pols d'un electroimant sense corrent per la bobina (Fig. 1) i fem créixer la intensitat i, per tant, el camp magnètic generat i el flux, aleshores, es produeix una f.e.m., és a dir, un treball, que fa que les càrregues inicien el seu moviment. Si hi ha fregament en el circuit (resitència R), cada càrrega experimenta dues forces, la segona de les quals, en ser de fregament, és major a major velocitat. Acò permet que, si la f.e.m. es constant, s'aplegue a un estat estacionari d'intensitat i de corrent constant i dissipació d'energia per unitat de temps en forma de calor també constant, d'acord amb la llei de Joule: $W = Ri^2$.
Si la resistència és zero, aleshores, una petita variació de flux produeix un corrent persistent en l'anell que s'oposa

al flux. Hem vist, eq. 2, que aquesta corrent s'origina perquè es genera un camp elèctric tangencial $\vec{E}$. Un electró experimenta una força $\vec{F} = -e\vec{E}$ i un moment $\vec{M} = -e\vec{r}\vec{E}$ que produeix una acceleració angular α: $M = I\alpha$, on $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ i I és el moment d'inèrcia. Aleshores,

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \frac{M}{I} = -\frac{e\,r}{I}E = \frac{e\,r}{I}\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi}{dt} \tag{3}$$

Integrant tenim,

$$\begin{aligned} \int_0^\omega d\omega &= \frac{1}{I}\frac{e}{2\pi}\int_0^\Phi d\Phi \\ \rightarrow \omega &= \frac{1}{I}\frac{e}{2\pi}\Phi \\ \rightarrow L = I\omega &= \frac{e}{2\pi}\Phi \end{aligned} \tag{4}$$

En unitats atòmiques $e = -1$ i $\Phi_0 = 2\pi$. Per tant, en unitats Φ_0 de flux, $L = -\Phi$.

Hom podria preguntar-se com s'ha generat un moment angular en el sistema total (electroimant i partícula en l'anell). Aquesta podria ser una versió més de l'anomenada paradoxa de Feynman. Paradoxa que no és tal si tenim en compte que els camps electromagnètics posseeixen moment angular (en la versió quàntica els fotons posseeixen un moment angular, i per això l'absorció d'un fotó va acompanyada d'una variació d'una unitat de moment angular en la matèria. Així la regla de selecció rotacional és $\Delta J = 1$, l'electrònica $\Delta\ell = 1$, la de ressonància magnètica $\Delta M = 1$, etc.)

Respecte de l'energia, si tenim en compte que el moment angular generat en la partícula més el flux és zero, tenim que:

$$\epsilon = \frac{(L+\Phi)^2}{2I} = 0 \tag{5}$$

i no hi ha flux a través de l'anell.

Podem veure-ho d'una altra manera. Sabem que en un circuit la f.e.m. $\in$ està relacionada amb la seua resistència i la intensitat que circula per aquest: $\in = Ri$. Com la intensitat no pot ser infinita, si la resistència R és zero, no es pot generar força electromotriu, i.e. $\in = 0$. Cosa que equival a dir que no pot haver diferencia de potencial entre dos punts d'un conductor ideal (hi ha un apantallament immediat i complet). Per tant, si tenim una espira superconductora i canviem externament el camp magnètic aplicat, la corrent en la espira canviarà per a que el flux romangui constant:

$$\in = 0 = \frac{d}{dt}\int B \cdot dA = \frac{d}{dt}\int (B_{ext} + B_I) \cdot dA, \tag{6}$$

on B_{ext} és el camp externament aplicat i B_I és el camp originat per la corrent induïda. Aquesta últim haurà de canviar de manera que la integral de B_I compense qualsevol canvi en la integral de B_{ext}.