Espai de funcions.

Ara farem un breu repàs dels espais de funcions distingint conceptes que de vegades es mesclen i confonen, per exemple:

Espai mètric. Un espai mètric és un conjunt on s'ha introduït la noció de distància que verifica unes propietats inspirades en les que són intuïtives de la distància habitual de l'espai ordinari.

Espai vectorial. Aquest concepte deriva del de vectors lliures en el pla ordinari. Un espai vectorial és un conjunt d'elements que anomenem vectors. En aquests s'ha definit l'operació interna de suma de vectors amb tota una sèrie de propietats que deriven de les propietats intuïtives de suma de vectors lliures del pla ordinari. A més, s'ha definit una operació externa, la multiplicació d'un vector per un escalar.

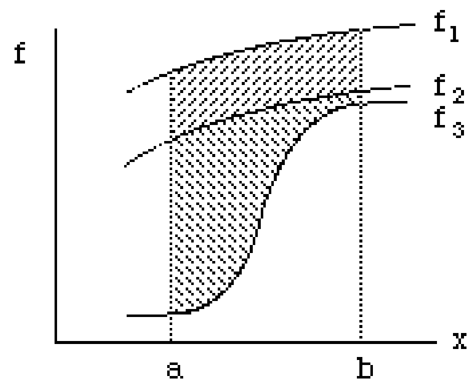
Espai normat. La possibilitat de definir el concepte de distància entre els elements d'un espai vectorial fa derivar la noció de norma o "longitud d'un vector" i, per tant, la d'espai normat. Un espai normat és un espai vectorial on s'ha definit la norma o longitud dels seus vectors.

Espai de Hilbert. Finalment, la introducció en un espai vectorial de la noció d'angle de vectors, cosa que va lligat al concepte de producte escalar, condueix a la noció d'espai de Hilbert.

Així doncs, en parlar de funcions considerarem en primer lloc la possibilitat de sumar funcions i multiplicar-les per números, és a dir, intentar estructurar el conjunt de funcions com a un espai vectorial. Després veurem si té sentit parlar de distància i com definir aquesta sense ambigüitat i parlar així de l'espai mètric de les funcions. Finalment farem el mateix amb el concepte d'angle fins arribar al concepte d'espai de Hilbert de funcions.

Considerem l'exemple dels polinomis de grau menor o igual a n. Coneixem les operacions de suma de polinomis i producte de polinomis per números reals. ¿Presenten els polinomis de grau menor o igual a n estructura d'espai vectorial sobre els números reals amb el concurs d'aquestes dues operacions? Particularitzem, per exemple $n \leq 3$. Escriguem dos polinomis qualsevol $P_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$; $P_2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2$. Notem que cada polinomi queda perfectament determinat sols especificant els coeficients de cada un dels monomis. Així podem escriure que $P_1(x) \equiv (a_1,b_1,c_1)$ i $P_2(x) \equiv (a_2,b_2,c_2)$. La suma de polinomis i el producte de polinomis per números reals queden reflectits per sumes d'aquests coeficients i per productes d'aquests coeficients per números reals. És a dir, veiem que els coeficients dels polinomis actuen a manera de coordenades. D'altra banda, treballant amb coordenades no trobem cap diferència entre els polinomis de grau menor o igual a 3 i els vectors de l'espai ordinari de tres dimensions. La diferència rau en el fet que la base que implícitament usem en R^3 és $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ (els tres vectors unitaris segons els eixos) mentre que la base que implícitament usem en l'espai de polinomis de grau menor o igual a tres són els monomis $\{1,x,x^2\}$. En conseqüència no necessitem comprovar que els polinomis, juntament amb les operacions de suma de polinomis i el producte d'un polinomi per un número real, compleixen totes les propietats que defineixen un espai vectorial. De segur que les compleixen, ja que la seua representació matricial ho fa. D'altra banda la comprovació és molt senzilla.

Provem d'introduir el concepte de distància entre polinomis i, en general, entre funcions. La idea consisteix a traduir la idea de "major o menor proximitat entre funcions" a números reals, és a dir, en alguna cosa quantitativa. ¿Tenim alguna idea intuïtiva de major o menor proximitat entre funcions? Vegem la figura següent on representem tres funcions d'una variable.



D'una banda tenim que f_2 és més pròxima a f_1 que a f_3 en x = a mentre que succeeix el contrari en x=b. En realitat, la idea intuïtiva de major o menor proximitat global entre les corbes ens la proporciona l'àrea que existeix entre aquestes. És obvi que, malgrat que per a alguns valors de x, f_2 és més pròxima a f_3 que a f_1, no és menys cert que és intuïtiu expressar que globalment en l'interval [a,b], f_2 és més pròxima a f_1 que a f_3. Així, doncs, hem trobat una manera de traduir la nostra idea intuïtiva de proximitat entre funcions en un criteri quantitatiu, és a dir, en números. Però hem de concretar més la nostra definició de distància entre funcions. Assumim intuïtivament que la distància és sempre positiva, per tant hem d'atendre que no apareguen signes negatius. Per aquesta raó definirem el quadrat de la distància com el quadrat de l'àrea.

$$d^2(f_1\,;f_2) = \int_a^b (f_1 - f_2)^2\,dx$$

I la distància com l'arrel quadrada positiva d'aquesta. D'aquesta manera comptem sempre àrees positives encara que dues corbes s'encreuen.

Hem definit així l'espai mètric de funcions. Dèiem que la distància ens indueix el mode de normar l'espai vectorial. Per a això anomenem h a la funció que resulta de restar f_1 i f_2. En perfecta analogia amb la connexió que existeix entre l'espai de punts (mètric) i l'espai de vectors (vectorial normat) anomenem norma de h, i la representem com $\|h\|$, l'arrel quadrada positiva de la corresponent integral.

$$\|h\|^2 = \int_a^b h^2\,dx$$

Si tractem amb funcions de variable complexa, considerem números complexos en lloc de números reals. Com que els conceptes de distància i norma els intuïm com a números reals (¿qui pot imaginar una distància entre dos punts de (3+4i) metres?) hem de generalitzar un poc les nostres definicions de distància i norma per tal d'englobar funcions de variable complexa. Així diem que la norma de h ve donada per:

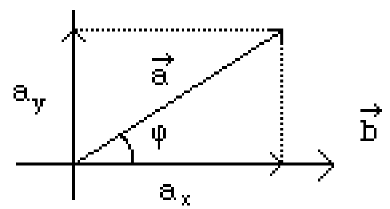
$$\|h\|^2 = \int_a^b h^*\,h\,dx \quad ,$$

i procedim de manera anàloga amb el concepte de distància.

Finalment desitgem definir l'espai de Hilbert de funcions. Aquest tipus d'estructura preveu l'existència d'angles entre vectors i lligat al concepte d'angle entre vectors, la definició de producte escalar. En R^n, el concepte de producte escalar i angle entre vectors és conseqüència de la següent desigualtat (que resulta immediata des de: $\sum_{i,j}(a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$:

$$\Big(\sum_i a_i\ b_i\Big)^2 \leq \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2$$

Vegem-ne un exemple en R^2:



La trigonometria ens defineix $\cos\varphi = a_x/\|\mathbf{a}\|$ i $\sin\varphi = a_y/\|\mathbf{a}\|$. A la vista de l'esquema anterior tenim que:

$$(a_x b_x + a_y b_y)^2 = (a \cos\varphi\ b + a \sin\varphi\ 0)^2 = a^2 b^2 \cos^2\varphi \leq a^2 b^2$$

ja que la funció cosinus és sempre menor o igual que la unitat.

La quantitat a^2 és el quadrat de la norma del vector **a**, de la mateixa manera b^2 ho és de **b**. Veiem que l'angle entre dos vectors es pot expressar per la relació entre la suma del producte ordenat dels seus components i les seues normes. El parèntesi $(a_x b_x + a_y b_y)$, l'anomenem producte escalar dels vectors **a** i **b** i el representem per (**a**·**b**). Generalitzem de seguida aquest resultat a R^n:

$$\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\|a\|\|b\|} = \frac{\sum_i a_i\ b_i}{\sqrt{\sum_i a_i^2}\sqrt{\sum_i b_i^2}}$$

Hom es pregunta si en l'espai de funcions pot trobar-se un tipus de desigualtat similar al considerat. La resposta és afirmativa. En efecte desenvolupem la quantitat definida positiva (1.7).

$$\int_a^b\!\!\int_a^b [\ f(x)\ g(y) - f(y)\ g(x)]^*\ [f(x)\ g(y) - f(y)\ g(x)]\ dx\ dy \ \geq\ 0$$

desenvolupant els productes i simplificant arribem a

$$\int_a^b |\ f\ |^2\ dx \int_a^b |\ g\ |^2\ dy\ -\ \int_a^b f^*\ g\ \ dx \int_a^b\ f\ \ g^*\ \ dy\ \geq\ 0$$

$$\left|\int f^*\ g\ \ dx\ \right|^2\ \leq\ \int |\ f\ |^2\ dx \int |\ g\ |^2\ \ dy$$

Per tant,

$$\frac{|\int f^* g\ dx\,|^2}{\int |f|^2\ dx \int |g|^2\ dy} \leq 1 \ \ \leftrightarrow\ \ -1 \leq \frac{|\int f^* g\ dx|}{\sqrt{\int |f|^2\ dx}\sqrt{\int |g|^2\ dy}} \leq 1$$

Així, doncs, definim l'angle entre funcions i, per tant, el seu producte escalar de forma anàloga al cas de vectors cartesians:

$$\cos\varphi = \frac{|\int f^{*}g\,dx|}{\sqrt{\int |f|^{2}\,dx}\sqrt{\int |g|^{2}\,dy}}$$

$$\langle f|g\rangle = \int_{a}^{b} f^{*}g\,dx$$

i amb tot això hem arribat a la noció d'espai de funcions de Hilbert.

Realment, quan parlem d'espai de funcions existeixen certes condicions de convergència que han de tenir-se en compte (convergència de les sèries de Cauchy) però que no entrarem a discutir. El nostre objectiu va ser arribar des d'un punt de vista intuïtiu a l'espai de funcions de Hilbert i ho continua sent. Per a més detalls matemàtics seria aconsellable la consulta d'un text de matemàtiques. Hi ha un llibret (les mides del qual no corresponen a l'ampli i rigorós contingut) que està traduït al castellà per editorial Teide, titulat "Introducción a l'espacio de Hilbert" de S. K. Berberian, on es pot trobar resposta a la majoria de les preguntes que es poden formular sobre l'espai de Hilbert.