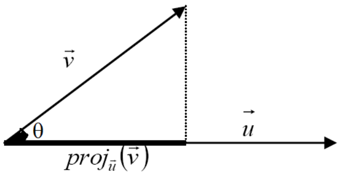
El producte escalar com una projecció



A la figura superior mostrem la projecció (l'ombra) del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$. Si anomenem $proj_{\vec{u}}(\vec{v})$ a aquesta ombra i θ a l'angle entre els vectors, de seguida veiem que:

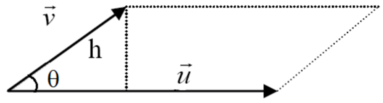
$$cos\ \theta = \frac{proj_{\vec{u}}(\vec{v})}{|\vec{v}|}$$

Per una altra banda, el producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = |\vec{u}||\vec{v}|cos\theta$. Si considerem un vector unitat en la direcció $\vec{u}$, i.e., un vector $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, el seu producte esclat amb $\vec{v}$ és:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|}|\vec{u}||\vec{v}|cos\theta = |\vec{v}|cos\theta = proj_{\vec{u}}(\vec{v})$$

Per tant, el producte escalar $\vec{v} \cdot \vec{u}$ representa $|\vec{u}|$ vegades l'ombra o projecció de $\vec{v}$ sobre la direcció $\vec{u}$ representada pel vector unitari $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.

El producte vectorial com un àrea orientada



A la figura superior veiem que: $Sin\,\theta = \frac{h}{|\vec{v}|} \rightarrow h = |\vec{v}|Sin\,\theta$, on h és l'alçada del paral·lelogram. La seua base és $|\vec{u}|$. Per tant, l'àrea (base x alçada) és: $A = |\vec{u}||\vec{v}|Sin\,\theta$, que no és altra cosa que el mòdul del producte vectorial dels dos vectors: $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$.

Recordem que si les coordenades dels dos vectors $\vec{u}, \vec{v}$ en la base ortonormal $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ són respectivament (v_1, v_2, v_3) i (u_1, u_2, u_3), el seu producte vectorial $\vec{w}$, que se pot escriure:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{\imath} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

és un vector perpendicular a $\vec{u}$ i $a\ \vec{v}$, com ho demostra el fet, que comprovem tot seguit, que el producte escalar és zero, és a dir, que la projecció del vector $\vec{w}$ sobre $\vec{u}$ i sobre $\vec{v}$ és zero:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (u_2v_3 - u_3v_2)u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)u_3$$

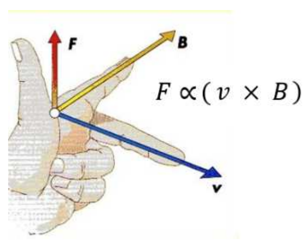
$$= u_2\cancel{v_3}u_1 - u_3\cancel{v_2}u_1 + u_3\cancel{v_1}u_2 - u_1\cancel{v_3}u_2 + u_1\cancel{v_2}u_3 - u_2\cancel{v_1}u_3 = 0$$

De la mateixa manera podem comprovar que $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$.

Finalment, com permutar dues línies en un determinant li canvia el signe, el vector $\vec{u} \times \vec{v}$ té sentit contrari al vector $\vec{v} \times \vec{u}$. Si usem coordenades és immediat comprovar que mentre que $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k},\ \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k}$:

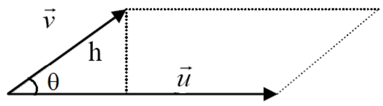
$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \qquad \vec{\jmath} \times \vec{\imath} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k}$$

Per tant, diem que el sentit del vector $\vec{w} \cdot \vec{u}$ ve donat per l'anomenada regla de la ma esquerra:

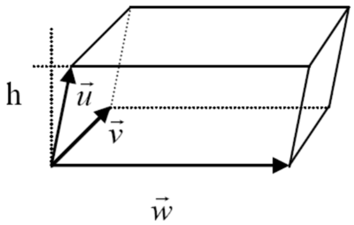


El producte mixt com un volum

Hem vist que el mòdul del producte vectorial de dos vectors representa l'àrea $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$ del paral·lelogram que podem formar amb ells dos:



El producte mixt de tres vectors representa el volum del paral·lelepípede format pels tres vectors:



En la figura podem veure que l'àrea A de la base del paral·lelepípede és el mòdul del producte vectorial $A = |\vec{v} \times \vec{w}|$.

El volum, és l'àrea de la base per l'alçada h: $V = A \cdot h$.

Un vector perpendicular a la base (e.g. l'alçada h) va en la direcció del producte $\vec{v} \times \vec{w}$. El vector alçada $\vec{h}$ va doncs en la direcció perpendicular a la base i presenta un mòdul $h = |\vec{u}| \cos \theta$, on θ és l'angle que forma el vector $\vec{u}$ amb la vertical.

Per tant, el volum V és:

$$V = A \cdot h = |\vec{v} \times \vec{w}|\, |\vec{u}| \cos \theta = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Independència lineal de tres vectors

Considerem els vectors $\vec{u}, \vec{v}$ i $\vec{w}$. Diem que $\vec{w}$ és linealment independent de $\vec{u}, \vec{v}$ si no podem escriure $\vec{w}$ com combinació lineal de $\vec{u}, \vec{v}$, és a dir, $\vec{w} \neq a\vec{u} + b\vec{v}$. Tanmateix, diem que $\vec{w}$ és linealment dependent de $\vec{u}, \vec{v}$ si $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

En altres paraules, $\vec{w}$ és linealment independent de $\vec{u}, \vec{v}$ si té una component no nul·la en la direcció perpendicular al plànol format pels vectors $\vec{u}, \vec{v}$. Per tant, els tres vectors conformen un paral·lelepípede i el producte mixt dels tres vectors, que representa el volum del paral·lelepípede, $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$, no serà zero. Cas que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ vol dir que $\vec{w}$ està en el plànol format pels altres dos vectors i per tant, el volum del paral·lelepípede que formen no té alçada i per tant té volum zero.

En resum, una manera immediata de comprovar la dependència lineal de tres vectors és calcular el seu producte mixt $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$, que no és altra cosa que el determinant 3 x 3 de les seues components. Si surt zero, són dependents. Si és no nul, són linealment independents.