

Principi de Pauli

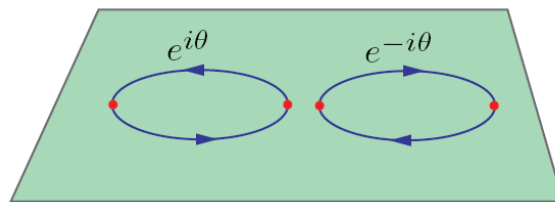
En un sistema de dos (o més) partícules indistingibles, si escrivim la funció d'ona $\Psi(x_1, x_2)$ vol dir que una de les partícules està en una posició x_1 i l'altra en x_2 però no sabem quina està en quina posició. En realitat, l'espai de configuració del sistema de dues partícules en d dimensions $C_2(R^d)$ (que és el conjunt de totes les possibles col·locacions de les dues partícules, excloent les posicions $x_1 = x_2$) és redundant. Si no ens importa quina partícula està en quin lloc, cal considerar l'espai quocient, $C_2(R^d)/S_2$, on dos posicions són equivalents si només es diferencien per una reordenació. S_2 representa el grup de permutacions de les dues partícules.

No obstant açò, escrivim $\Psi(x_1, x_2)$, identificant així cada partícula i fent ús de l'espai de configuració $C_2(R^d)$. Com la funció d'ona no és un observable però sí que ho és la densitat, diem que $\Psi^*(x_1, x_2)\Psi(x_1, x_2)$ és invariant sota la permutació:

$$\mathcal{P}_{12}(\Psi^*\Psi) = \mathcal{P}_{12}(\Psi^*) \mathcal{P}_{12}(\Psi) = \Psi^*\Psi.$$

Per tant, cal que si $\mathcal{P}_{12}(\Psi) = e^{i\theta}\Psi$, aleshores $\mathcal{P}_{12}(\Psi^*) = e^{-i\theta}\Psi^*$, on θ pot ser una funció de les coordenades, per tal de fer invariant la densitat a la permutació de posicions equivalents en l'espai de configuració del sistema.

Si considerem dos partícules en un espai 2D observem que quan permutem dues partícules hi ha dos evolucions no equivalents en l'espai de configuració.¹



Veiem que en 2D, el camí de permutació de dues partícules ve acompanyat d'una orientació i, com a conseqüència, un camí a dretes i el seu invers, un camí a esquerres, es poden associar amb factors de fase inversos. Tanmateix, en tres dimensions o superiors no hi ha cap diferència intrínseca entre les orientacions d'un camí i altre, ja que el camí de la dreta pot ser contínuament deformat al de l'esquerra per una rotació en la dimensió addicional. Per tant, en dimensions superiors a dos, el factor de fase $e^{i\theta}$ associat a la permutació ha de ser igual a la seva inversa $e^{-i\theta}$. Per tant, $\theta = 0, \pi$ i la fase està restringida a ± 1 .

En 3D o superior, anomenem bosons a les partícules associades amb la fase +1 i fermions els associats amb la fase -1. Si la dimensió de l'espai es redueix de 3D a 2D, deixa d'haver la restricció del factor de fase i apareix un continu de possibilitats que interpola entre els casos de bosó i fermió. Wilczek va introduir el nom de *anyon* per a referir-se a aquest nou tipus de partícules.²

¹Quan diem que hi ha dues evolucions diferents per permutar dues partícules en 2D, no estem referint-nos trajectòries reals clàssiques definida amb posicions i velocitats exactes, sinó a una evolució en l'espai de configuració del sistema, que no representa moviment físic del sistema.

² Un exemple on la manera exacta de bescanviar partícules en un espai 2D presenta un efecte físic mesurable ens el proporciona l'efecte d'Aharonov-Bohm. Imaginem una regió on hi ha un flux magnètic perpendicular al pla on es mouen dos electrons. Si bescanviem les dues partícules seguint un camí que no envolta el flux magnètic, la funció d'ona pot adquirir una certa fase $e^{i\theta}$. Si permutem les dues partícules però el camí envolta la regió amb flux magnètic, la funció d'ona adquireix una fase addicional $e^{i\Phi}$, on Φ és el flux magnètic. Per un camí hi ha canvis de la funció en variar el flux, per l'altre no.

Un poc d'història sobre el principi de Pauli

El principi d'exclusió de Pauli (dos electrons en un àtom no poden tenir els mateixos nombres quàntics) va ser postulat per Pauli per tal d'explicar per què els electrons en un àtom no estan tots en el nivell més baix d'energia (com prediria la física clàssica), sinó que es distribueixen en diferents capes electròniques com sembla indicar la taula periòdica i a les propietats químiques dels elements.

Cal dir que quan Pauli va postular el principi d'exclusió (1925), encara no s'havia formulat completament la mecànica quàntica ondulatoria (Schrödinger, 1926), de manera que Pauli no va relacionar explícitament el seu principi amb l'antisimetria de la funció d'ona electrònica. Fou més tard, quan Jordan i Wigner (1928) van deduir l'antisimetria de la funció d'ona dels electrons en observar l'absència de certes línies espectrals predites per la mecànica quàntica en cas que els electrons pogueren ser descrits amb funcions d'ona simètriques.

En particular, l'espectroscòpia de l'Heli revelava que l'estat fonamental de l'heli havia de ser un estat no degenerat (un singlet³). Ara bé, la funció espacial de l'estat fonamental del sistema de dos electrons no pot presentar nodes, perquè de presentar-ne seria possible trobar una funció variacional sense nodes, no pròpia de l'Hamiltonià, amb la mateixa energia, cosa que contradiu el principi variacional.⁴ Per tant, en no poder tindre nodes, la funció espacial de l'estat fonamental de l'Heli ha de ser simètrica respecte el bescanvi de les coordenades espacials dels dos electrons. A més, l'estat és no degenerat, per tant, la funció d'espín de dos partícules no degenerada és el singlet. En altre paraules, l'estat fonamental de l'heli havia de ser un estat singlet (funció espacial simètrica + funció de spin antisimètrica). Si els electrons tinguessin funcions d'ona simètriques, podríem veure també estats fonamentals de triplets (funció espacial simètrica + funció de spin simètrica), però no se veien. Existeixen estats triplets sí, però amb més energia. Per exemple l'ortoheli, que és un estat excitats (funció espacial antisimètrica + funció de spin simètrica). Aquestes i altres observacions van connectar el principi d'exclusió de Pauli amb l'antisimetria de la funció d'ona en sistemes multi-partícules.

³ Una forma de detectar singulets/triplets és l'aplicació d'un camp magnètic, que desdobra el senyal dels triplets en trencar-se la seua degeneració per l'acció del camp.

⁴ Veure e.g. secció 4.5 de C.D. Mattis, *The Theory of Magnetism I*, Springer-Verlag, Berlin 1988.