

**EL
BREVIARIO DEL
SEÑOR TOMPKINS:**

**EN EL PAIS DE LAS MARAVILLAS
LA INVESTIGACION DEL ATOMO**

GEORGE GAMOW

**c
f**
e

BREVIARIOS
Fondo de Cultura Económica

VII. EL BILLAR CUÁNTICO

EL SEÑOR Tompkins volvía a su casa un día, muy cansado después de la larga jornada de trabajo en el banco, que estaba realizando un catastro. Al pasar por una taberna, decidió detenerse a tomar un vaso de cerveza. Al vaso siguieron otros, hasta que el señor Tompkins empezó a sentirse mareado. Había al fondo una sala de billar, llena de hombres en mangas de camisa que jugaban en la mesa central. Recordó vagamente haber estado antes en el lugar, al que uno de sus compañeros de oficina lo había llevado para enseñarle a jugar. Se acercó a la mesa y empezó a mirar la partida. ¡Pero sucedía algo muy extraño! Un jugador puso una bola en la mesa y le dio con el taco. Al mirarla rodar, el señor Tompkins advirtió con gran sorpresa que la bola empezaba a “desplazarse”. No podía describir con otra palabra el extraño comportamiento de la bola, la cual, mientras recorría el tapete verde, se veía cada vez más desleída, y perdía sus límites claros. Parecía que no era una sola bola la que rodaba por la mesa, sino muchas, que se penetraban parcialmente entre sí. El señor Tompkins había observado fenómenos análogos en otras ocasiones, pero ahora sólo había tomado algo de cerveza y no veía la razón de que se le presentasen tan pronto. —Bueno —pensó—, vamos a ver cómo choca esa bola pastosa con otra.

El jugador que golpeó la bola era evidentemente

un experto, pues ésta chocó de frente con otra, con la mayor precisión. Sonó un golpe seco y tanto la bola incidente como la golpeada (el señor Tompkins no podía decidir con certeza cuál era cuál) se dispersaron “en todas direcciones”. Era extraordinario en efecto: no se trataba ya de dos bolas, de aspecto más o menos difuminado, sino que se diría que una multitud de ellas —todas *muy* vagas y confusas— se desplegaban en un ángulo de 180° en torno a la dirección del impacto original. Parecía una onda peculiar que partiese del punto de la colisión.

El señor Tompkins notó, sin embargo, que por donde corrían más bolas era en la dirección del impacto.



La bola blanca iba por todas direcciones

–Dispersión de la onda S –dijo una voz familiar detrás de él, y el señor Tompkins reconoció al profesor.

–¿Ya tenemos de nuevo algo curvo? –exclamó el señor Tompkins–. La mesa me parece enteramente llana.

–Así es –respondió el profesor–. Aquí el espacio es enteramente llano, y lo que está usted observando es en realidad un fenómeno mecánico-cuántico.

–¡Ah, las matrices! –insinuó el señor Tompkins con sorna.

–O, mejor, la incertidumbre del movimiento –replicó el profesor–. El propietario de este billar ha reunido aquí varios objetos que padecen, valga la expresión, de “elefantiasis cuántica”. Es claro que todos los cuerpos del universo están sometidos a leyes cuánticas, pero la llamada constante cuántica, que gobierna semejantes fenómenos, es muy pequeña: tiene nada menos que veintisiete ceros después del punto decimal. Pero para estas bolas, sin embargo, la constante es muchísimo mayor, próxima a la unidad; así puede usted contemplar fenómenos que la ciencia sólo consiguió descubrir aplicando métodos de observación muy sensibles y rebuscados –al llegar a este punto el profesor se quedó unos instantes reflexionando.

–No es mi intención criticar –siguió diciendo–, pero *quisiera* saber de dónde salieron estas bolas. Estrictamente hablando, no pueden existir en nuestro mundo, porque todos los cuerpos com-

prendidos en él poseen la misma constante cuántica muy pequeña.

–A lo mejor las trajeron de otro mundo –propuso el señor Tompkins–. Pero el profesor no quedó conforme y siguió con aire suspicaz.

–Habría notado usted –prosiguió– que las bolas “se despliegan”. O sea que su posición sobre la mesa no es del todo definida. En realidad, es imposible señalar exactamente la posición de una bola: lo más que puede decirse es que determinada bola está “aquí en su mayor parte” y “el resto en otros lugares”.

–Lo cual es extrañísimo –murmuró el señor Tompkins.

–Por el contrario –insistió el profesor–, es de lo más natural, puesto que lo mismo sucede en todo momento a cualquier cuerpo material. Lo que pasa es que, a causa del pequeño valor de la constante cuántica y la tosquedad de los métodos de observación, la gente no advierte la incertidumbre, lo cual lleva a la errónea conclusión de que la velocidad y la posición son magnitudes definidas. En realidad, ambas son indefinidas hasta cierto punto, y al definir una con precisión creciente, la otra se “dispersa” cada vez más, haciéndose más incierta. Precisamente es la constante cuántica la que gobierna la relación entre estas dos incertidumbres. Mire usted: voy a poner límites a la posición de esta bola, encerrándola en un triángulo de madera.

En cuanto la bola quedó encerrada, la superficie

interior del triángulo se llenó enteramente con el lustre del marfil.

—¡Vea! —dijo el profesor—. Definí la posición de la bola limitándola a las dimensiones del triángulo, sólo unos cuantos centímetros. Y eso conduce a una considerable incertidumbre en la velocidad. La bola se está moviendo muy de prisa dentro del triángulo.

—¿Es posible detenerla? —preguntó el señor Tompkins.

—No. Sería físicamente imposible. Cualquier cuerpo en un espacio limitado posee cierto movimiento: el “movimiento del punto cero”, como decimos los físicos. Es el caso, por ejemplo, del movimiento de los electrones en cualquier átomo.

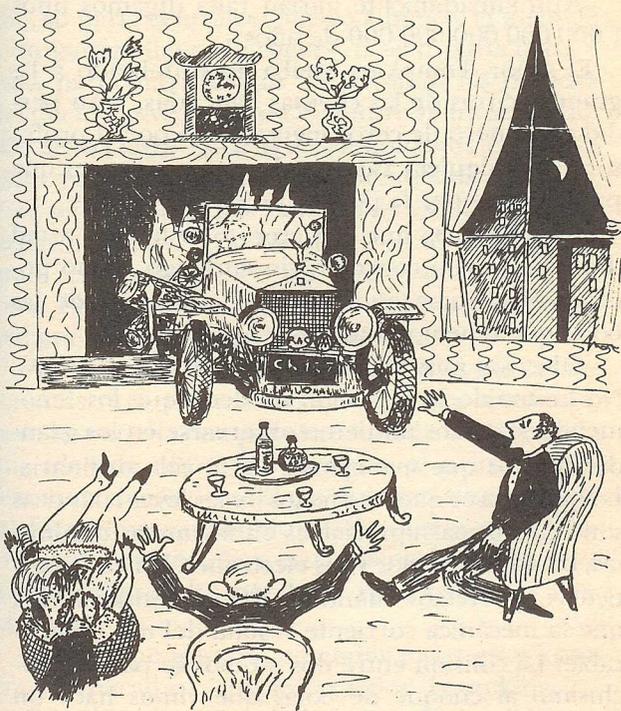
El señor Tompkins contemplaba agitarse la bola en su encierro, como un tigre enjaulado, cuando sucedió algo inesperado: la bola se “escapó” a través de la pared del triángulo, y un instante después corría hacia la esquina opuesta de la mesa. Lo raro del caso es que no saltó sobre la pared de madera, sino que la atravesó, sin levantarse de la mesa.

—Ahí tiene —dijo el señor Tompkins—. Su “movimiento del punto cero” se ha escapado. ¿También eso está en las reglas?

—No faltaría más. Se trata, es verdad, de una de las consecuencias más interesantes de la teoría cuántica. Es imposible mantener un objeto encerrado mientras tenga energía suficiente para correr después de atravesar la pared. Siempre acabará por “escaparse”.

—Entonces no volveré jamás al zoológico —dijo el

señor Tompkins con decisión, mientras su vívida imaginación le presentaba un cuadro aterrador de tigres y leones “cruzando” las paredes de sus jaulas. Y en seguida sus pensamientos tomaron otro rumbo: se imaginó un coche, perfectamente resguardado en un garaje, saliendo por la pared, como un viejo fantasma medieval.



Tal como un viejo fantasma medieval

—¿Cuánto tiempo tendría que esperar para que un coche de acero ordinario (no de la materia de estas bolas) “atravesara”, digamos, la pared de un garaje de ladrillo? —preguntó al profesor—. ¡Me encantaría verlo!

El profesor hizo algunos rápidos cálculos mentales y respondió al fin:

—Aproximadamente harían falta digamos unos 1 000 000 000 000 000 de años.

El señor Tompkins estaba acostumbrado a las grandes cifras de las cuentas bancarias, pero perdió el número de ceros mencionado por el profesor. En cualquier caso, bastaban para no tener que preocuparse por la posible huida del coche.

—Supongamos que me creo todo lo que usted dice. No puedo concebir, sin embargo, cómo podrían observarse estas cosas sin disponer de las bolas que tenemos aquí.

—Objeción muy razonable —admitió el profesor—. No he tenido la intención de decir que los fenómenos cuánticos pudieran observarse en los grandes objetos que manejamos en la vida ordinaria. Lo que pasa es que los efectos de las leyes cuánticas son mucho más apreciables en las masas diminutas, como los átomos y los electrones. En estas partículas los efectos cuánticos son tan importantes, que la mecánica corriente resulta del todo inaplicable. La colisión entre dos átomos se parece muchísimo al choque de bolas que vimos hace un momento, y el movimiento de los electrones en un átomo corresponde de cerca al “movimiento del

punto cero” que mostraba la bola de billar cuando la encerré en el triángulo de madera.

—¿Y los átomos se escapan del garaje muy a menudo?

—Sí, por cierto. Indudablemente usted habrá oído hablar de los cuerpos radiactivos, cuyos átomos se desintegran espontáneamente, emitiendo partículas velocísimas. Un átomo así, o mejor dicho, su parte central, el núcleo atómico, es análogo a un garaje lleno de coches, o sean partículas. Y estas partículas escapan atravesando las paredes del núcleo; a veces no están dentro ni un segundo. ¡En semejantes núcleos los fenómenos cuánticos están verdaderamente a la orden del día!

El señor Tompkins, cansado de esta larga exposición, miraba distraídamente a su alrededor. Un gran reloj colocado en un rincón atrajo su atención. El largo y anticuado péndulo oscilaba sosegadamente de izquierda a derecha.

—Veo que le interesa el reloj —intervino el profesor—. Es otro mecanismo no del todo corriente, pero hoy en día está pasado de moda. Este reloj da una idea de cómo se describían al principio los fenómenos cuánticos. El péndulo está dispuesto de tal forma que su amplitud sólo puede recibir incrementos finitos. Pero actualmente todos los relojeros prefieren los péndulos patentados, de despliegue.

—¡Cómo me gustaría entender todas estas cosas tan complicadas! —suspiró el señor Tompkins.

—Muy bien —repuso el profesor—, yo entré en esta taberna porque lo vi a usted por la ventana cuando

me dirigía a dictar mi conferencia sobre la teoría cuántica. Ya no puedo quedarme más tiempo si es que no quiero llegar tarde a mi conferencia. ¿No viene usted?

—¡Claro que sí! —exclamó el señor Tompkins.

El gran auditorio estaba, como siempre, atestado de estudiantes, y el señor Tompkins pudo tenerse por afortunado cuando halló dónde sentarse en un escalón.

DAMAS Y CABALLEROS —comenzó el profesor—:

En mis dos conferencias anteriores traté de mostrar a ustedes cómo el descubrimiento del límite superior de todas las velocidades físicas y el análisis del concepto de línea recta nos han llevado a una completa revisión de las ideas tradicionales acerca del espacio y el tiempo.

Sin embargo, el análisis crítico de los fundamentos de la física no se detuvo aquí, sino que hizo descubrimientos y sacó conclusiones que pueden calificarse de más sorprendentes.

Me refiero a la rama de la física conocida por teoría cuántica, la cual no se ocupa tanto de las propiedades del espacio y el tiempo puros como de las interacciones mutuas y de los movimientos de los objetos materiales en el espacio y en el tiempo. En la física clásica nunca se dudó de que la interacción entre dos cuerpos físicos cualesquiera se podía reducir hasta el grado exigido por las condiciones del experimento, prácticamente hasta cero, en el caso de ser necesario.

Si al investigar el calor emitido en determinados procesos se temía, por ejemplo, que la introducción de un termómetro en el sistema haría perder algo de calor, trastornando con ello el curso normal del proceso observado, el experimentador confiaba invariablemente en que usando un termómetro menor, o un par termoeléctrico diminuto, la perturbación podría reducirse tanto que no rebasaría los límites de la precisión requerida.

Tan fuerte era la convicción de que, al menos en principio, es posible observar cualquier proceso físico con la exactitud deseada, sin que la observación lo afecte, que nadie se preocupó siquiera en formular explícitamente esta proposición, y todos los problemas de este tipo que se presentaban eran considerados como meras dificultades técnicas. Lo cual no evitó que desde los primeros años de nuestro siglo empezaran a acumularse hechos empíricos nuevos, que condujeron gradualmente a los físicos a sacar la conclusión de que la situación es, en realidad, mucho más complicada, ya que *existe en la naturaleza un límite inferior de interacción imposible de salvar*. Por lo que toca a los procesos con que estamos familiarizados en la vida ordinaria, este límite natural de precisión es insignificante, pero su importancia es decisiva por lo que toca a las interacciones en sistemas mecánicos diminutos, como los átomos y las moléculas.

El físico alemán Max Planck, al investigar teóricamente, en 1900, las condiciones de equilibrio entre materia y radiación, llegó a la sorprendente conclusión de que *la interacción entre la materia y la*

*radiación no se verifica de manera continua, como se había supuesto, sino en una serie de "golpes" separados, y que en cada uno de estos actos elementales de interacción una cantidad definida de energía se transfiere de la materia a la radiación, o viceversa. A fin de conseguir el equilibrio deseado, y llegar así a un acuerdo con los hechos experimentales, fue necesario introducir una sencilla relación matemática de proporcionalidad entre la cantidad de energía transferida en cada golpe y la frecuencia (periodo inverso), del proceso conducente a la transferencia de energía. Así, denotando el coeficiente de proporcionalidad por el símbolo h , Planck no tuvo más remedio que aceptar que la porción mínima de energía transferida, o *cuanto*, debe ser dada por la expresión*

$$E = h\nu, \quad (1)$$

donde ν es la frecuencia. La constante h tiene el valor numérico de 6.547×10^{-27} ergios \times segundo, y suele llamarse constante de Planck o constante cuántica. Su reducido valor numérico explica por qué los fenómenos cuánticos no se observan casi nunca en la vida cotidiana.

Fue Einstein quien, pocos años después, desarrolló las ideas de Planck, y mostró que *no sólo la radiación es emitida en porciones discretas, definidas, sino que existe siempre con esta forma de "paquetes de energía", que denominó cuantos de luz.*

Como los cuantos de luz están siempre en movimiento, deben poseer, junto a su energía $h\nu$,

cierto momento mecánico, el cual, de acuerdo con la mecánica relativista, es igual a su energía dividida entre la velocidad de la luz c . Recordando que la frecuencia de la luz está relacionada con su longitud de onda, λ , por la relación $\nu = c/\lambda$, podemos representar de la siguiente manera el momento mecánico del cuanto de luz:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (2)$$

Como la acción mecánica producida por el impacto de un objeto en movimiento corresponde a su momento, hay que aceptar entonces que la acción de los cuantos de luz aumenta al disminuir su longitud de onda.

Una de las pruebas experimentales más convincentes de que la teoría de los cuantos de luz, y de la energía, y el momento a ellos atribuido es correcta, se desprendió de un estudio efectuado por el físico estadounidense Arthur Compton, quien, al investigar las colisiones entre electrones y cuantos de luz, observó que los electrones puestos en movimiento por acción de un rayo de luz se comportaban precisamente como si hubieran sido golpeados por partículas con las energías y momentos dados por las fórmulas (1) y (2). Se demostró igualmente que después de chocar con los electrones, los propios cuantos de luz sufren ciertos cambios (de frecuencia), que están absolutamente de acuerdo con las predicciones teóricas.

Hoy en día podemos decir que, al menos en lo que toca a sus interacciones con la materia, las

propiedades cuánticas de la radiación son un hecho experimental bien establecido.

Otro progreso en este nuevo campo se debió al célebre físico danés Niels Bohr, quien, en 1913, expresó por primera vez la idea de que *el movimiento interno de todo sistema mecánico puede poseer sólo un número discreto de valores energéticos posibles, y que el movimiento sólo puede cambiar su estado por transiciones finitas*, en cada una de las cuales se emite una cantidad definida de energía. Las reglas matemáticas que definen los estados posibles de los sistemas mecánicos son más complicadas que en el caso de la radiación, y no las formularemos. Baste con indicar que, al igual que en el caso de los cuantos de luz, en que el momento es definido en función de la longitud de onda, también en el sistema mecánico se define el momento de cualquier partícula móvil, en función ahora de las dimensiones geométricas de la región en que se mueve, y su magnitud la da la expresión:

$$p_{\text{partícula}} \cong \frac{h}{l}, \quad (3)$$

siendo l igual a las dimensiones lineales de la región del movimiento. En virtud del bajísimo valor de la constante cuántica, los fenómenos cuánticos sólo adquieren importancia por lo que toca a movimientos que tienen lugar en regiones tan diminutas como el interior de átomos y moléculas y desempeñan un papel decisivo en nuestro conocimiento de la estructura interna de la materia.

Entre las demostraciones más directas de la exis-

tencia de la serie de estados discretos en estos sistemas mecánicos diminutos, se cuentan los experimentos de James Franck y Gustav Hertz, quienes advirtieron, al bombardear átomos con electrones de diferentes energías, que el estado del átomo sólo se modificaba en forma definida cuando la energía de los electrones incidentes alcanzaba ciertos valores discretos. Si la energía de los electrones se reducía por debajo de un cierto límite no se observaba efecto alguno en los átomos, porque la energía transportada por cada electrón no era suficiente para elevar el átomo del primer estado cuántico al segundo.

Así, al terminar esta primera etapa preliminar del desarrollo de la teoría cuántica, la situación podía describirse no como la modificación de los conceptos y principios fundamentales de la física clásica, sino como su restricción, más o menos artificial, por obra de condiciones cuánticas misteriosas, que seleccionaban, de entre la variedad continua de movimientos clásicamente posibles, sólo un grupo discreto de movimientos "permitidos". Si, no obstante, ahondamos en las relaciones entre las leyes clásicas y estas condiciones cuánticas exigidas por nuestra ampliada experiencia, descubriremos que el sistema obtenido mediante su unificación padece de incongruencia lógica y que las restricciones cuánticas empíricas restan sentido a las nociones fundamentales en que se funda la mecánica clásica. En efecto, el postulado fundamental aceptado por la teoría clásica del movimiento dice que toda partícula móvil ocupa determinada posición

en el espacio en un momento dado, y posee una velocidad definida, que caracteriza perfectamente bien sus cambios de posición temporales, a lo largo de una trayectoria.

Estas nociones fundamentales de posición, velocidad y trayectoria, que sirven de base al complicado edificio de la mecánica clásica, se forman (como todas nuestras nociones) mediante la observación de los fenómenos que nos rodean, y, como las nociones clásicas de espacio y tiempo, son susceptibles de sufrir profundas modificaciones, conforme nuestra experiencia se extiende a regiones nuevas y por lo tanto inexploradas.

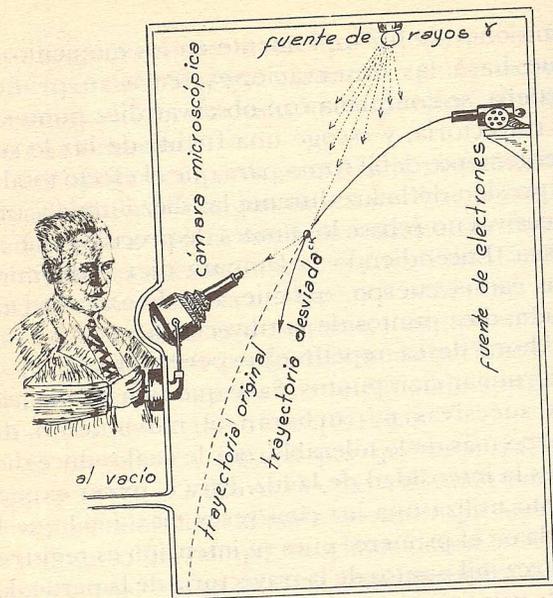
Si pregunto a alguien por qué cree que cualquier partícula móvil ocupa, en cualquier momento dado, determinada posición que describe, en el curso del tiempo, una línea definida llamada trayectoria, me contestará seguramente: "porque así lo veo, cuando observo el movimiento". Analicemos este método de formar la noción clásica de trayectoria, y veamos si en verdad conduce a un resultado definido. Con este fin, imaginémosnos a un físico provisto de algún aparato extraordinariamente sensible, que trate de seguir el movimiento de un cuerpo material pequeño, arrojado desde la pared de su laboratorio. Decide hacer su observación "mirando" cómo se mueve el cuerpo, y para lograrlo usa un teodolito pequeño, pero muy preciso. Naturalmente, para ver el cuerpo móvil tiene que iluminarlo, y, sabiendo que la luz ejerce cierta presión sobre el cuerpo que puede perturbar su movimiento, decide utilizar breves

emisiones de luz únicamente en los momentos en que hará las observaciones. Para su primera prueba, se conforma con observar diez puntos de la trayectoria, y escoge una fuente de luz lo suficientemente débil como para que el efecto total de la presión de la luz durante las diez iluminaciones sucesivas no rebase los límites de precisión que necesita. Encendiendo la lámpara diez veces mientras cae el cuerpo, obtiene, con la exactitud deseada, diez puntos de la trayectoria.

Ahora desea repetir el experimento, a fin de determinar cien puntos. Sabe que cien iluminaciones sucesivas perturbarán el movimiento del cuerpo más de lo tolerable, por lo cual reduce diez veces la intensidad de la luz. Para el tercer experimento utiliza una luz cien veces más débil que la usada en el primero, pues su intención es registrar esta vez mil puntos de la trayectoria de la partícula.

De esta manera va reduciendo constantemente la intensidad de la iluminación, y determina tantos puntos como desea, sin elevar el error posible por encima del límite que desde un principio se impuso. Aunque hemos descrito un procedimiento grandemente idealizado, en principio es aplicable, y, en todo caso, representa el método lógico estricto para definir una trayectoria con sólo "mirar al cuerpo en movimiento". Como ustedes ven, esto es perfectamente posible en el marco de la física clásica.

Pero veamos lo que pasa al introducir limitaciones cuánticas y tomar en cuenta el hecho de que cualquier radiación puede ser transmitida sólo en



El microscopio de rayos γ de Heisenberg

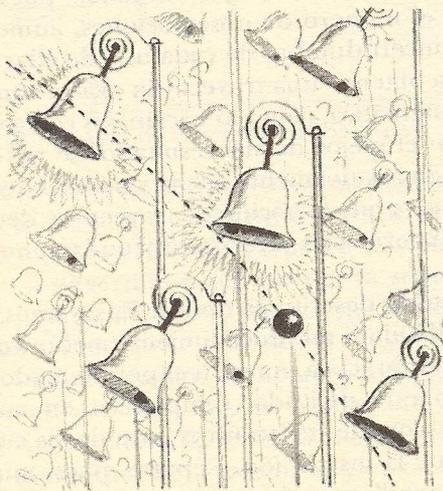
forma de cuantos de luz. Hemos visto que nuestro observador reducía incesantemente la intensidad de la iluminación sobre el cuerpo en movimiento, pero ahora advertimos que no podrá seguir haciéndolo indefinidamente, puesto que la iluminación llegará a reducirse a un solo cuanto. Todo o nada del total de cuantos de luz será reflejado por el cuerpo en movimiento y en el segundo caso la observación no podrá hacerse. Es sabido, como ya vimos, que el efecto de la colisión con un cuanto de luz disminuye según crece la longitud de onda; el experimentador, que lo sabe, lo toma en cuenta, y

aplica a sus observaciones luces de longitud de onda creciente, para compensar el número de observaciones que desea. Pero, para su desgracia, encontrará otra dificultad.

Es bien sabido que, utilizando luz de determinada longitud de onda, no pueden distinguirse detalles de menores dimensiones que la longitud de onda misma. ¡No se pintan miniaturas persas con una brocha gorda! De modo que, al utilizar longitudes de onda cada vez mayores, trastornará todas sus determinaciones de cada uno de los puntos, y no tardará en llegar a una etapa en la que cada observación entrañará una incertidumbre del orden de las dimensiones de su laboratorio o mayor todavía. Está en un callejón sin salida, pues, al aumentar el número de observaciones, aumenta de paso la incertidumbre de cada una de ellas: jamás llegará a obtener una trayectoria exacta como una línea matemática, como lo hacían sus colegas clásicos. Aun el mejor de sus resultados se reducirá a una banda relativamente ancha y no bien definida, en tal forma que la noción de trayectoria deducida de sus experiencias diferirá profundamente de la clásica.

El método descrito es óptico. Ensayemos ahora otra posibilidad: un procedimiento mecánico. Para ponerlo en práctica, nuestro experimentador idea algún aparato delicado, campanillas en muelles, por ejemplo, que registrará el paso de los cuerpos a través de la instalación. Reparte, pues, muchísimas campanillas por la región que, se espera, será atravesada por el cuerpo móvil. El repique de las

campanillas dará la trayectoria buscada. En la física clásica, las campanillas pueden hacerse tan pequeñas y sensibles como se quiera, lo cual, en el caso límite de una infinidad de campanillas infinitamente pequeñas, lleva a trayectorias determinadas con la precisión que se desee. Pero otra vez se complica la situación al introducir las limitaciones cuánticas de los sistemas mecánicos. Si las "campanillas" son demasiado pequeñas, tomarán del cuerpo móvil momentos considerables, de acuerdo con la ecuación (3), y bastará el choque con una sola para que el movimiento sea profundamente afectado. Si las campanillas son grandes, la incertidumbre de cada posición del cuerpo será muy



Campanillas en muelles

grande. Otra vez se obtendrá, irremediabilmente, una banda difusa como trayectoria.

Me temo que esta descripción de un experimentador en busca de una trayectoria les ha parecido a ustedes demasiado técnica, llevándolos tal vez a pensar que, si bien los métodos descritos no permiten apreciar la trayectoria con precisión, otros más complicados sí lo lograrán. Insisto, pues, en que no he hablado de experimentos reales que se hayan efectuado en algún laboratorio, sino de idealizaciones del problema general planteado por las mediciones físicas. En la medida en que todas las acciones en nuestro universo se deben a campos de radiación, o son puramente mecánicas, cualquier complicado sistema de medición se reducirá fatalmente a los elementos descritos en estos dos métodos y llevará, finalmente, a los mismos resultados. Aunque nuestro "aparato de medida" ideal comprenda el mundo físico entero, nos veremos forzados a aceptar que algunos conceptos, como los de "posición exacta" y "trayectoria definida", no hallan cabida en un mundo sometido a leyes cuánticas.

Volvamos ahora a nuestro experimentador, a fin de determinar la forma matemática de las limitaciones impuestas por las condiciones cuánticas. Vimos en ambos ejemplos, que se establece un conflicto entre las medidas de posición y los trastornos causados al cuerpo en movimiento. En el método óptico, el choque con un cuanto de luz, debido a la ley mecánica de la conservación del momento, introduce en el momento de las partícu-

las una incertidumbre comparable al momento de los cuantos de luz usados. Aplicando la fórmula (2), escribimos así la incertidumbre en el momento de la partícula:

$$\Delta p_{\text{partícula}} \cong \frac{h}{\lambda} \quad (4)$$

y, recordando que la incertidumbre en la posición de la partícula es dada por la longitud de onda ($\Delta q \cong \lambda$) deducimos que

$$\Delta p_{\text{partícula}} \times \Delta q_{\text{partícula}} \cong h. \quad (5)$$

En el método mecánico, el momento de la partícula en movimiento se reducirá en un grado incierto, a causa de los choques con las "campanillas". A partir de la fórmula (3), y recordando que en este caso la incertidumbre en la posición es dada por las dimensiones de la campanilla ($\Delta q \cong l$), obtenemos la misma fórmula finita del caso anterior. La relación (5), formulada por primera vez por el físico alemán Werner Heisenberg, representa la relación fundamental de incertidumbre en la teoría cuántica: *mientras mejor se define la posición, más indefinido se vuelve el momento, y viceversa.*

Como el momento es el producto de la masa por la velocidad de su movimiento, podemos escribir

$$\Delta v_{\text{partícula}} \times \Delta q_{\text{partícula}} \cong \frac{h}{m_{\text{partícula}}}. \quad (6)$$

En los cuerpos ordinarios, el resultado es ridículo

en su pequeñez. En una microscópica partícula de polvo de 0.000 000 1 gramos, es posible determinar la posición y la velocidad con precisión del 0.000 000 01%. Pero la masa de un electrón es de 10^{-29} gramos, y el producto $\Delta v \Delta q$ valdrá 100. La velocidad de un electrón dentro de un átomo debe ser próxima a 10^{10} cm/seg, pues, de no ser así, se escaparía. Mas este valor implica una incertidumbre de 10^{-8} cm en la posición, lo cual corresponde a las dimensiones totales del átomo. La dispersión sufrida por la "órbita" de un electrón llega hasta el punto en que la "anchura" de aquella es igual a su "radio". *El electrón aparece simultáneamente en todas partes, alrededor del núcleo.*

Llevo veinte minutos tratando de mostrarles los resultados catastróficos a que lleva nuestra crítica de los conceptos clásicos del movimiento. Las elegantes nociones clásicas, perfectamente definidas, caen destrozadas, y ceden el lugar a una especie de masa o pasta informe. Se preguntarán ustedes qué van a hacer los físicos para describir cualquier fenómeno en este océano de incertidumbre. La respuesta es que, aunque hemos destruido los conceptos clásicos, todavía no hemos formulado exactamente los nuevos.

Pasemos ahora a este asunto. No podemos —es la primera regla— definir la posición de una partícula material como un punto matemático, o su trayectoria como una línea matemática; tenemos que usar, pues, otras descripciones que nos den, digámoslo así, el "despliegue" o, más bien, la "densidad" de esa especie de "pasta", en los diversos

puntos del espacio. Lo cual exige, desde el punto de vista matemático, la aplicación de funciones continuas (como las usadas en hidrodinámica), y, desde el físico, acostumbrarse a frases como "este objeto está aquí en su mayor parte, pero parcialmente allá, y el resto en otros lugares", o "el 75% de esta moneda está en mi bolsillo, y el 25% en el de usted". Sé que semejantes expresiones aterrorizarán a todos ustedes, y trataré de consolarlos recordando que la insignificancia de la constante cuántica las hace inútiles en la vida corriente. Pero si piensan estudiar física atómica, les recomiendo que empiecen por acostumbrarse a ellas.

Debo prevenir a ustedes contra la idea errónea de que la función que describe la "densidad de presencia" posee realidad física en nuestro espacio tridimensional ordinario. Describir el comportamiento de dos partículas es describir simultáneamente la presencia de cada una de ellas, lo cual requiere una función de seis variables (tres coordenadas por partícula), imposible de "localizar" en el espacio tridimensional. En los sistemas más complejos, hay que aplicar más variables todavía. Vista así, la "función mecánico-cuántica" recuerda a la "función de potencial" de un sistema de partículas en mecánica clásica, o a la "entropía" de un sistema en mecánica estadística. Se limita a describir el movimiento, ayudándonos a predecir el curso de cualquier movimiento, en cualesquier condiciones dadas. La realidad física reside en las partículas cuyo movimiento estudiamos.

La función que describe hasta qué punto la par-

tícula (o el sistema de partículas) está en determinados lugares, requiere una representación matemática; siguiendo al físico austriaco Erwin Schrödinger (que fue el descubridor de la ecuación que define el comportamiento de esta función), se emplea el símbolo ψ .

No voy a demostrar matemáticamente la ecuación fundamental de Schrödinger; me contentaré con indicar a ustedes que su deducción exige ciertos requisitos, el más importante de los cuales es bien poco común: *debe escribirse una ecuación tal, que la función que describa el movimiento de las partículas materiales tenga todas las características de una onda.*

Fue el físico francés Louis de Broglie quien indicó la necesidad de atribuir propiedades ondulatorias al movimiento de las partículas materiales, de acuerdo con sus estudios teóricos de la estructura atómica. En los años siguientes se multiplicaron los experimentos que demostraban sin lugar a dudas las propiedades ondulatorias del movimiento de las partículas materiales. Se logró, por ejemplo, *difractar* un haz de electrones, al hacerlo pasar por una abertura diminuta, y se observaron *fenómenos de interferencia* hasta en partículas relativamente grandes y complicadas, como las moléculas.

Aceptando las ideas tradicionales sobre el movimiento, las propiedades ondulatorias de las partículas materiales resultaban absolutamente incomprensibles, y el propio De Broglie tuvo que adoptar un punto de vista muy raro: postuló que

las partículas iban “acompañadas” y, hasta cierto punto, “dirigidas” por ciertas ondas.

Sin embargo, no tardaron en destruirse las nociones clásicas, y la descripción del movimiento por funciones continuas hace mucho más comprensible el necesario carácter ondulatorio que, así considerado, indica sólo que la propagación de nuestra función ψ no es análoga a la transmisión, digamos, del calor a través de una pared calentada por un lado, sino más bien a la propagación de una deformación mecánica, como el sonido. Lo cual implica una forma matemática con restricciones bien definidas para la función que estamos buscando. Si a esta condición fundamental se agrega la necesidad de que nuestras ecuaciones coincidan con las de la mecánica clásica en las partículas de masa considerable, donde los efectos cuánticos son insignificantes, el problema de hallar la ecuación se reduce prácticamente a un ejercicio puramente matemático.

Voy a escribir la ecuación definitiva, a fin de que conozcan ustedes su aspecto:

$$\nabla^2\psi + \frac{4\pi mi}{h} \dot{\psi} - \frac{8\pi^2 m}{h} U\psi = 0. \quad (7)$$

Aquí la función U representa el potencial de fuerzas que actúa sobre nuestras partículas (de masa m), y conduce a soluciones definidas del problema del movimiento con cualquier distribución de fuerzas. En los pocos años que lleva de existencia, esta “ecuación de Schrödinger” ha permitido a los

físicos elaborar un cuadro más completo y lógicamente congruente de los fenómenos del mundo atómico.

Puede que haya extrañado a algunos de ustedes no haberme oído hablar de las “matrices”, mencionadas frecuentemente en relación con la teoría cuántica. Debo confesar que, en lo personal, me desagradan esas matrices, y prefiero arreglármelas sin ellas. Pero, a fin de que no queden ustedes sin saber nada de este instrumento matemático de la teoría cuántica, añadiré unas palabras sobre el particular. Ya hemos visto que el movimiento de una partícula o de un sistema mecánico complejo es descrito siempre por ciertas funciones de onda continuas. Como tales funciones suelen ser muy complicadas, pueden considerarse compuestas de oscilaciones más sencillas, llamadas “funciones propias”, al igual que los sonidos complejos se descomponen en armónicos sencillos. El movimiento complejo, a su vez, puede describirse dando las amplitudes de sus diferentes componentes (armónicos). Y como éstos son infinitos, hay que usar tablas de amplitudes también infinitas, de este tipo:

$$\begin{array}{cccc} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \quad (8)$$

Una tabla así puede introducirse en las operaciones matemáticas, tomando en cuenta reglas bas-

tante sencillas, y se denomina la "matriz" correspondiente a un movimiento dado. Algunos físicos teóricos prefieren trabajar con matrices, en lugar de las funciones de onda propiamente dichas. O sea que la "mecánica de matrices" —pues así la llaman— no es sino una modificación matemática de la "mecánica ondulatoria" ordinaria, y en estas conferencias, dedicadas ante todo a las cuestiones principales, es imposible entrar en mayores detalles.

Lamento en el alma que el tiempo me impida hablarles de los nuevos progresos de la teoría cuántica, en relación con la teoría de la relatividad, debidos al físico británico Paul Adrien Maurice Dirac, en los cuales destacan puntos muy interesantes, y han conducido también a varios descubrimientos experimentales importantísimos. Espero volver sobre estos problemas en otra ocasión, pero debo detenerme aquí y manifestar mi esperanza de que esta serie de pláticas les haya ayudado a alcanzar una idea más precisa de los conceptos de la física actual, impulsándolos tal vez hacia estudios más detenidos.

VIII. SELVAS CUÁNTICAS

A LA mañana siguiente, el señor Tompkins dormitaba en su cama cuando cayó en la cuenta de que no estaba solo en la habitación. Mirando con mayor cuidado descubrió que el profesor, su viejo amigo, estaba sentado en el sillón, embebido en el estudio de un mapa desplegado sobre sus rodillas.

—¿Viene usted? —preguntó el profesor, alzando la cabeza.

—¿Adónde? —el señor Tompkins estaba perplejo al encontrar al profesor en su habitación.

—A ver los elefantes y los demás animales de la selva cuántica. Está bien claro. El propietario del billar que visitamos me reveló hace poco el secreto de la procedencia del marfil usado para hacer sus bolas de billar. ¿Ve usted esta región que he marcado con lápiz rojo sobre el mapa? Parece ser que en ella todos los objetos se hallan sometidos a leyes cuánticas con una constante sumamente elevada. Los indígenas creen que la región está habitada por demonios, así que me temo que nos va a resultar casi imposible conseguir un guía. Pero si va usted a acompañarme, le aconsejo que se levante cuanto antes. El barco sale dentro de una hora, y tenemos que recoger a Sir Richard.

—¿Quién es Sir Richard? —preguntó el señor Tompkins.

—¿Es que nunca ha oído hablar de él? —el profesor parecía sorprendido—. Es un famoso cazador

de tigres; y se decidió a venir con nosotros en cuanto le prometí una cacería interesante.

Llegaron al muelle a tiempo de ver cómo subían al barco varias cajas alargadas que contenían los rifles de Sir Richard y las balas especiales, hechas de plomo extraído por el profesor de unas minas próximas a la selva cuántica. Estaba el señor Tompkins ordenando el equipaje en el camarote cuando la monótona vibración del barco le indicó que había zarpado. La jornada por mar no tuvo nada de notable, y el señor Tompkins no sintió pasar el tiempo hasta que llegaron a una fascinante ciudad oriental, el paraje poblado más próximo a las misteriosas regiones cuánticas.

—Ahora —indicó el profesor— debemos comprar un elefante para nuestro viaje tierra adentro. Como me parece que ningún nativo querrá acompañarnos, tendremos que conducir nosotros mismos el elefante, y de eso, querido señor Tompkins, tendrá que encargarse usted. Yo estaré demasiado ocupado con mis observaciones científicas y Sir Richard manejará las armas de fuego.

El señor Tompkins se sintió muy desdichado al llegar al mercado de elefantes, en las afueras de la ciudad, y ver enormes animales, uno de los cuales debería conducir. Sir Richard, que entendía mucho de elefantes, escogió un animal de espléndido aspecto, y preguntó el precio al propietario.

—*Hrup hanweck 'o hobot hum. Hagori ho, haraham oh Hohohohi* —dijo el nativo, mostrando sus dientes relucientes.

—Quiere muchísimo dinero —tradujo Sir Ri-

chard—, pero dice que es un elefante de la selva cuántica: por eso resulta tan caro. ¿Lo compramos?

—Desde luego —explicó el profesor—. Oí en el barco que los nativos capturan a veces elefantes provenientes de las regiones cuánticas. Son mucho mejores que los demás y, en nuestro caso, representará una indiscutible ventaja, pues el animal se sentirá a sus anchas en la selva cuántica.

El señor Tompkins examinó el elefante por los cuatro costados; era un hermoso animal corpulento, pero no se comportaba diferentemente de los elefantes que había visto en el zoológico. Se dirigió al profesor:

—Dice usted que es un elefante cuántico, pero no me parece distinto a los demás elefantes, ni actúa de manera divertida, como aquellas bolas de billar hechas con los colmillos de sus parientes. ¿Por qué, pues, no se dispersa en todas direcciones?

—Manifiesta usted una comprensión peculiarmente lerda —dijo el profesor—. No lo hace, por razón de que su masa es muy considerable. Hace tiempo le expliqué a usted que toda incertidumbre en la posición o en la velocidad depende de la masa: cuanto mayor es ésta, tanto menor resulta la incertidumbre. De ahí que las leyes cuánticas no se hayan observado, en el mundo ordinario, ni siquiera en cuerpos tan diminutos como las partículas de polvo. Se tornan importantísimas en los electrones, que son billones de veces más ligeros que un grano de polvo. Pues bien; aunque en la selva cuántica la constante cuántica es considerable, no

basta, con todo, para hacer que se manifiesten efectos notables en un animal tan pesado como este elefante. La única manera de apreciar la incertidumbre en la posición del elefante cuántico es examinar de cerca sus contornos. Tal vez haya usted notado que la superficie de la piel no es del todo definida, sino que aparece algo confusa. Con el tiempo, esta incertidumbre va en lento aumento, lo cual me parece el origen de una leyenda de los nativos, según la cual los elefantes muy viejos de la selva cuántica tienen pelo largo. Espero, sin embargo, que todos los animales de menor tamaño exhibirán efectos cuánticos notables.

—Qué suerte —pensó el señor Tompkins— que no vamos a hacer la expedición a caballo, pues no habría sabido si el animal estaba entre mis rodillas o andaba detrás de cualquier cerro.

En cuanto el profesor y Sir Richard con sus fusiles hubieron trepado a la cesta que llevaba el elefante sobre el lomo, y el señor Tompkins, en su nuevo papel de conductor, se hubo instalado en el cuello, aguijón en mano, partieron hacia la selva misteriosa.

Los lugareños les informaron que tardarían alrededor de una hora en llegar, así que el señor Tompkins, esforzándose por guardar el equilibrio, decidió aprovechar el tiempo aprendiendo del profesor más detalles sobre los fenómenos cuánticos.

—¿Tendría usted la amabilidad de explicarme —preguntó, volviéndose hacia él— *por qué* los cuerpos de masa pequeña se comportan en forma tan

especial y cuál es, a fin de cuentas, el significado de esa constante cuántica que menciona usted a cada paso?

—No es muy difícil de entender —dijo el profesor—. El comportamiento divertido que observa en todos los objetos del mundo cuántico se debe, sencillamente, a que usted los está mirando.

—¿Tan vergonzosos son? —preguntó sonriendo el señor Tompkins.

—“Vergonzosos” no es la palabra justa —fue la fría respuesta—. Lo que pasa es que, para efectuar cualquier observación de un movimiento, es inevitable perturbarlo. En realidad, para percibir algunas características de un cuerpo en movimiento es necesario que éste ejerza cierta acción sobre los sentidos o sobre el aparato empleado. En virtud de la igualdad de la acción y la reacción, debemos concluir que el instrumento de medición también ha actuado necesariamente sobre el cuerpo, que ha estropeado su movimiento, por así decirlo, introduciendo una incertidumbre tanto en su posición como en su velocidad.

—Estoy de acuerdo —dijo el señor Tompkins— en que si hubiera tocado la bola de billar cuántica con el dedo habría perturbado su movimiento. Pero no pasé de mirarla. ¿También eso la trastorna?

—Por supuesto. Es imposible ver la bola en la oscuridad, pero si se enciende la luz, los rayos reflejados por la bola (que son los que la hacen visible) actúan sobre ella y “estropean” su movimiento. “Presión de la luz” llamamos a este efecto.

—Pero supongamos que utilizo aparatos suma-

mente delicados y sensibles. ¿No puedo lograr así que la acción de mis instrumentos sobre el cuerpo móvil se reduzca hasta lo insignificante?

—Tal era la opinión de la física clásica, antes del descubrimiento del *cuanto de acción*. A principios del presente siglo hubo que reconocer que la *acción* de cualquier objeto no puede ser inferior a cierto límite, representado por la constante cuántica, la cual es designada por el símbolo *h*. En el mundo ordinario, el cuanto de acción es diminuto; en las unidades acostumbradas se expresa por un número con veintisiete ceros tras el punto decimal, de modo que sólo es importante en partículas ligerísimas, como los electrones, que, gracias a su minúscula masa, son afectados por acciones muy pequeñas. Pero vamos rumbo a la selva cuántica, donde el cuanto de acción es enorme. Es un mundo tosco, donde son imposibles las acciones débiles. Allí, si alguien intentara acariciar un gatito, o no sentiría nada, o lo desnucaría al primer cuanto de caricia.

—Todo eso está muy bien —dijo el señor Tompkins pensativo—, pero cuando nadie los esté mirando me imagino que los cuerpos se comportarán normalmente, quiero decir: en la forma a que nos tienen acostumbrados.

—Cuando nadie mira —dijo el profesor—, nadie puede saber lo que está pasando, de modo que su pregunta carece de sentido físico.

—¡Vaya, vaya! —exclamó el señor Tompkins—. Francamente, eso me suena a filosofía.

—Llámelo así, si gusta —el profesor evidente-

mente se había ofendido—. En realidad es el principio fundamental de la física moderna: *nunca hablar de aquello que no se puede conocer*. La totalidad de la teoría física moderna se funda en este principio, que el filósofo suele pasar por alto. Por ejemplo, Kant, el famoso filósofo alemán, dedicó muchísimo tiempo a considerar las propiedades de los cuerpos, pero no tal como se nos aparecen, sino como son “en sí”. Para el físico moderno sólo tienen sentido los “observables” (propiedades observables, sobre todo), y la ciencia se basa en sus relaciones mutuas. Las cosas imposibles de observar no sirven más que a la especulación ociosa; puede usted inventarlas a placer, pero jamás logrará confirmar su existencia o aplicarlas a cualquier fin. Yo diría que . . .

En aquel preciso instante resonó un rugido pavoroso y el elefante dio tal respingo que el señor Tompkins estuvo a punto de caer al suelo. Una nutrida manada de tigres acosaba al elefante por todas partes. Sir Richard se echó el fusil a la cara y tiró del gatillo, apuntando precisamente entre los ojos del tigre más cercano. Inmediatamente el señor Tompkins le oyó murmurar cierta palabrota, que suelen usar los cazadores: había atravesado la cabeza del tigre sin hacerle el menor daño.

—¡Siga disparando! —gritó el profesor—. ¡Reparta el fuego alrededor, sin cuidarse de hacer blancos precisos! No es más que un tigre, pero está disperso en torno a nuestro elefante. ¡Nuestra única esperanza es alzar la hamiltoniana!

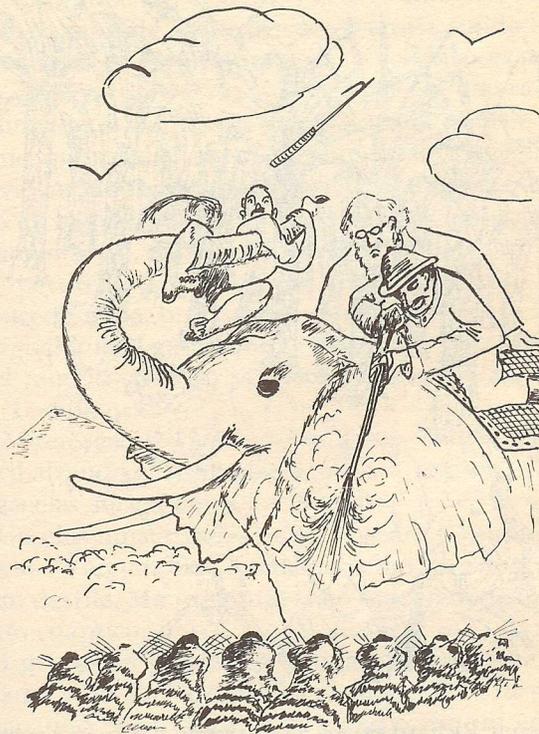
El profesor cogió otro rifle y el estruendo de las

descargas se mezcló a los rugidos del tigre cuántico. Al señor Tompkins le pareció que pasaba una eternidad. Finalmente, una de las balas "acertó" y, para gran sorpresa del señor Tompkins, el tigre (pues en uno se convirtió) salió por el aire con tal ímpetu que, tras describir un arco, fue a caer detrás de un palmar distante.

—¿Quién es la hamiltoniana?—preguntó el señor Tompkins cuando volvió la calma—. ¿Alguna famosa cazadora que trató usted de sacar de la tumba para que viniera en nuestra ayuda?

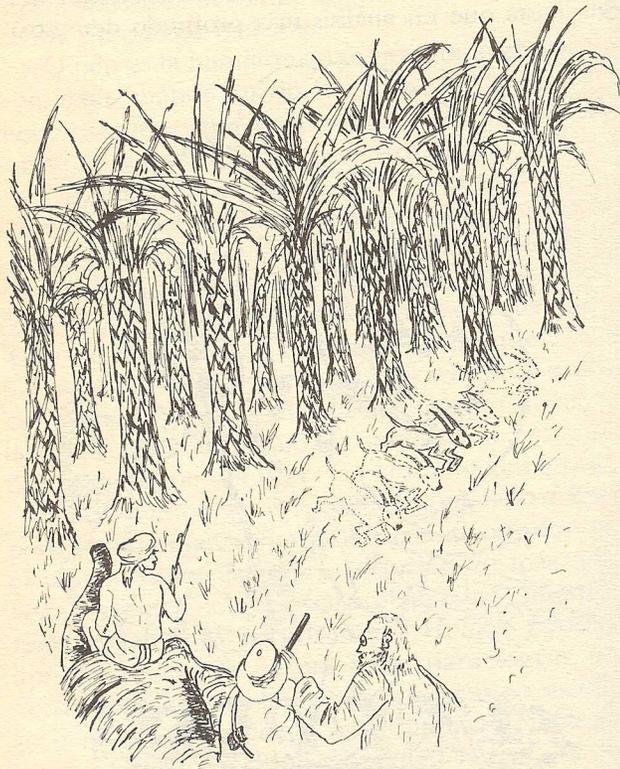
—¡Oh, lo siento de veras!—explicó el profesor—. Excitado por el combate empecé a utilizar el lenguaje científico, que usted no entiende. Hamiltoniana se llama una expresión matemática que describe la interacción cuántica entre dos cuerpos. Toma el nombre de un matemático irlandés, Hamilton, que fue el primero en aplicarla. Sólo quise decir que disparando más balas cuánticas aumentaríamos la probabilidad de interacción entre la bala y el cuerpo del tigre. En el mundo cuántico, como acaba usted de ver, por mucho cuidado que se ponga al apuntar, es imposible contar con dar en el blanco. Como la bala se dispersa, lo más que llega a alcanzarse es cierta probabilidad finita de acertar, jamás la certidumbre. Hemos gastado aproximadamente treinta balas para lograr un verdadero blanco sobre el tigre. Lo mismo sucede en nuestro mundo de todos los días, pero en escala mucho menor. Lo que pasa es que, como ya le he explicado, en el mundo ordinario hay que investigar partículas diminutas, como los electrones, para

advertir estos efectos. Tal vez sepa usted que todo átomo consta de un núcleo relativamente pesado, en torno al cual gira determinado número de electrones. En un principio se creyó que el movimiento de estos electrones en torno al núcleo era del todo análogo al de los planetas alrededor del Sol, hasta que un análisis más profundo demostró



Una nutrida manada de tigres acosaba al elefante

que las nociones ordinarias acerca del movimiento son demasiado groseras para los sistemas diminutos como el del átomo. Las acciones que intervienen en los átomos son del mismo orden de magnitud que el cuanto elemental de acción; de ahí que



El señor Richard estaba ya dispuesto a disparar cuando el profesor se lo impidió

el cuadro se haga muy confuso. El movimiento de un electrón alrededor de un núcleo atómico es, en buena parte, análogo al del tigre por los alrededores de nuestro elefante; parecía estar en todas partes a la vez.

—¿Y alguien se dedica a disparar a los electrones, como nosotros al tigre?

—¡Naturalmente! El núcleo mismo emite en ocasiones cuantos de luz de elevada energía, unidades elementales de acción luminosa. Y también es posible disparar a los electrones desde el exterior, iluminando el átomo con un rayo de luz. Sucede lo mismo que con el tigre: muchos cuantos de luz atraviesan la zona ocupada por el electrón sin afectarlo en lo más mínimo, hasta que uno acaba por actuar sobre él, expulsándolo del átomo. Es imposible perturbar levemente un sistema cuántico; o no sucede nada, o el cambio es decisivo.

—Igual que el gatito que no puede ser acariciado en el mundo cuántico sin perecer —concluyó el señor Tompkins.

—¡Miren, gacelas! ¡Son muchas! —exclamó Sir Richard alzando el fusil; efectivamente, una manada de gacelas surgía entre los bambúes—.

—Gacelas amaestradas —dijo el señor Tompkins para sí—. Van tan bien formadas como los soldados en un desfile. Me pregunto si no se tratará de otro efecto cuántico.

El grupo de gacelas se acercaba velozmente al elefante y Sir Richard estaba ya dispuesto a disparar cuando el profesor se lo impidió con un ademán.

—No desperdicie sus cartuchos —recomendó—; es muy poco probable hacer blanco en un animal cuando se está difractando.

—¿Qué es eso de *un* animal? —exclamó Sir Richard—. Por lo menos hay unas cuantas docenas.

—¡En modo alguno! Es una sola gacelita, seguramente asustada, que corre entre los bambúes. Ahora bien, la “dispersión” de los cuerpos conduce a propiedades análogas a las de la luz ordinaria, por lo cual al atravesar una serie ordenada de aberturas como las que separan a las cañas de bambú, que quizá le hayan explicado en la escuela. Por eso hablamos del carácter ondulatorio de la materia.

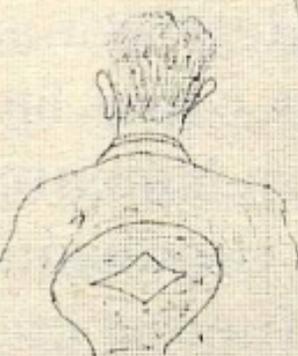
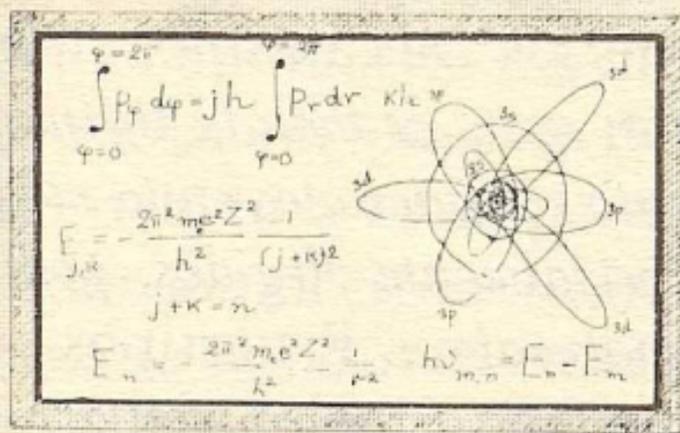
Ni Sir Richard ni el señor Tompkins alcanzaban a explicarse el significado de la misteriosa palabra “difracción”, y la conversación se interrumpió.

En su recorrido por las tierras cuánticas, los tres viajeros tropezaron con innumerables fenómenos interesantes, como los mosquitos cuánticos, difícilísimos de localizar, en virtud de su reducida masa, y también algunos monos cuánticos muy graciosos. Al fin vislumbraron lo que, según todas las apariencias, era una aldea indígena.

—No tenía noticia de que estas regiones estuviesen habitadas —dijo el profesor—. El ruido me hace sospechar que celebran una especie de festival. Escuchen el campanileo.

■ Era casi imposible discernir por separado las siluetas de los nativos, que bailaban una danza salvaje alrededor de una enorme hoguera. A cada instante se alzaban sobre la turba manos morenas

que sacudían campanas de todas dimensiones. Conforme se acercaban, todo, incluso las chozas y los árboles frondosos, se empezó a confundir, y el tintineo de las campanillas llegó a hacerse insoporrible para los oídos del señor Tompkins. Tendió la mano, agarró algo y lo tiró. El despertador dio en el vaso de agua que tenía en la mesa de noche, y un chorro de agua fría acabó de despertar al señor Tompkins. Se puso en pie de un salto y empezó a vestirse a toda prisa. Media hora después, debería estar en el banco.



Así obtenemos el esquema original Bohr-Sommerfeld