La transformada de Legendre

Imaginem que tenim una funció *y=y(x)*. Per exemple la Lagrangiana *L(v)* que depèn de la velocitat o l'energia interna *U(V)* que depèn del volum.

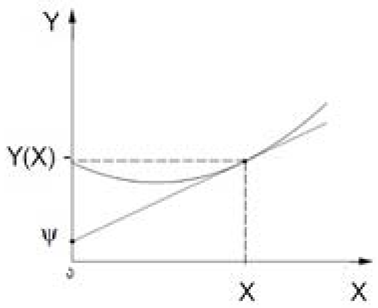
Anomenem ξ(x) a la seua derivada: ξ(x)=dy/dx. Per exemple, el moment canònic $p = \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)$ en el cas de la Lagrangiana o la pressió $P = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)$ en el cas de l'energia interna.

Ens preguntem si podem trobar *y(ξ)* , atès que *y=y(x)* i *ξ = ξ(x)*.

Escrivim: $\xi = \frac{dy}{dx} \rightarrow dy = \xi\, dx = \xi\, \frac{dx}{d\xi}\, d\xi = \xi\, \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} d\xi.$

Per tant, si $\frac{d\xi}{dx} \neq 0$ podem integrar: $y = \int \xi\, \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-1} d\xi + C$. Veiem doncs que *y(ξ,C)* queda indeterminat per la constant d'integració *C*. El motiu és que hi ha infinites corbes *y=y(x)*amb la mateixa derivada ξ(x). No hi ha prou amb la derivada en cada punt per determinar la funció *y*.

Ens preguntem si és possible trobar una altra funció ψ(ξ) unívocament determinada per y(x) i viceversa. És a dir, si hi ha una bijecció (x,y) ↔(ξ,ψ). La resposta és si, cas que ψ siga l'ordenada a l'origen de les tangents a la corba y(x).

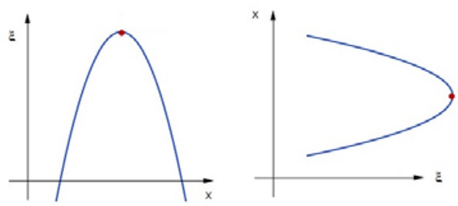


De la gràfica: $\xi = \frac{y-\psi}{x-0} \rightarrow \psi = y - x\,\xi$.

Ara, si l'equació $\xi = \frac{dy}{dx} = F(x)$ és invertible, podem trobar: $x = F^{-1}(\xi)$,

$y = y[F^{-1}(\xi)]$ i, per tant, ψ(ξ).

Per a que F(x) siga invertible cal que, en tot el rang de la x que ens puga interessar, la derivada $\frac{d\xi}{dx}$ ha de ser no nul·la: $\frac{d\xi}{dx} \neq 0$, d'altra manera ξ(x) tindria un màxim (o un mínim) i, en conseqüència x(ξ) no seria una funció unievaluada (vegeu figura següent).



Aquesta condició està salvada en el cas de la Lagrangiana perquè la derivada del moment respecte de la velocitat és la massa, que és no nul·la. En el cas de l'energia interna, perquè la derivada de la pressió respecte del volum tampoc poc ser zero en sistemes amb una única fase.

Comprovem que ψ = ψ(ξ): $d\psi = \mathrm{dy} - \xi\, \mathrm{dx} - \mathrm{x}\, \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\mathrm{dx} - \xi\, \mathrm{dx} - \mathrm{x}\, \mathrm{d}\xi = -\mathrm{x}\, \mathrm{d}\xi \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi}\right) \mathrm{d}\xi$ per tant ψ = ψ(ξ).

La transformada de l'energia interna U és l'entalpia $H(S,P) = U - V\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = U + PV$ i la de la Lagrangiana la funció de Hamilton (canviada de signe):

$$-H(x,p) = L(x,v) - v\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)_x = (T - V) - v\,p = -(T + V) \rightarrow H(x,p) = T + V$$