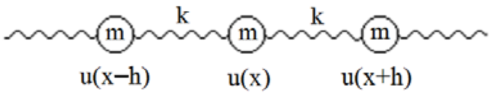
Equació d'ones monodimensional clàssica

Podem obtenir l'equació d'ones en una dimensió de la següent manera: considerem una sèrie de masses *m* unides per molles de constant elàstica *k*, sense massa i longitud *h*.

Anomenem *u (x,t)* a la separació de la situació d'equilibri de la massa situada en la posició *x* quan el temps és *t*. Anomenem *u (x,t)* camp de deformacions.



La força resultant sobre la massa *m* situada en *x* és:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)$$

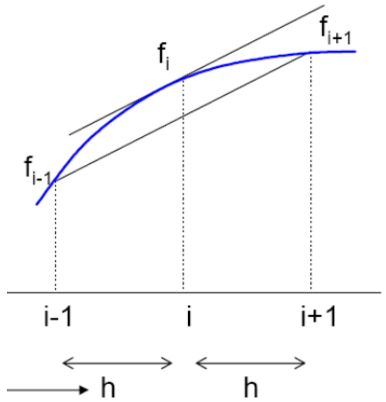
Aquesta força és la resultant de les dues forces elàstiques a que està sotmesa la massa:

$$F = F(x+h) + F(x-h) = k[u(x+h,t) - u(x,t)] + k[u(x-h,t) - u(x,t)]$$

Per tant, igualant tenim:

$$m \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = k[u(x+h,t) + u(x-h,t) - 2u(x,t)]$$

Considerem ara el següent esquema on mostrem la derivada d'una funció com el límit d'un diferencia finita, $f'_i = (f_{i+1} - f_{i-1})/(2h)$, i la de la segona derivada, de manera semblant.



$$f'(x_i) = f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$$

$$f''(x_i) = f''_i = \frac{f'_{i+1} - f'_{i-1}}{2h} =$$

$$= \ldots = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

Per tant, l'equació anterior de les forces, en el límit de molles de longitud *h* infinitesimal (i masses *m* infinitesimals), es transforma en:

$$m \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = h^2 k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{m}{h^2 k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)$$

On un pur anàlisi de dimensions ens indica que el factor h^2k/m ha de tenir dimensions de velocitat al quadrat v^2. Aquesta és la velocitat de propagació del moviment ondulatori. Ho podem veure en resoldre l'equació. Si escrivim $u(x,t) = f(x)g(t)$ trobem: $f g'' = v^2 g f'' \rightarrow \frac{f''}{f} = \frac{1}{v^2}\frac{g''}{g} = -s \rightarrow f(x) = A\, Sin(\sqrt{s}\, x);\; g(t) = B\, Sin(\sqrt{v^2 s}\, t)$ per tant, el nombre d'ones k és $\sqrt{s}$ i $\omega = \sqrt{v^2 s}$. La velocitat, efectivament, és la ratio ω/k.