Equació matricial d'autovalors en una base no ortogonal

Considerem un espai vectorial de N dimensions i considerem una base no ortogonal en aquest espai $\{|\mathbf{w}_i\rangle, i = 1, 2, \ldots, N\}$. Anomenem mètrica de la base a la matriu els elements de la qual són els productes escalars: $S_{ij} = \langle \mathbf{w}_i | \mathbf{w}_j \rangle$.

Considerem també una aplicació lineal A definida en aquest espai: $A|\mathbf{w}_i\rangle = \sum_j c_j |\mathbf{w}_j\rangle$. La representació matricial de l'aplicació A és la matriu $N \times N$ amb elements $A_{ij} = \langle \mathbf{w}_i | A | \mathbf{w}_j \rangle$ i la dels vectors $|\mathbf{w}_i\rangle$ la sèrie de N matrius columna d'N elements on tots són zero, excepte un d'ells que val la unitat.

Considerem ara l'equació d'autovalors de l'aplicació lineal A: $A|\mathbf{v}\rangle = \lambda|\mathbf{v}\rangle$. Escrivim el vector $|\mathbf{v}\rangle$ en la base no ortogonal anterior: $|\mathbf{v}\rangle = \sum_i c_i |\mathbf{w}_i\rangle$. Aleshores,

$$\begin{aligned} A|\mathbf{v}\rangle &= \lambda|\mathbf{v}\rangle \\ A \textstyle\sum_i c_i |\mathbf{w}_i\rangle &= \lambda \textstyle\sum_i c_i |\mathbf{w}_i\rangle \end{aligned} \tag{1}$$

Si multipliquem l'equació anterior per $\langle \mathbf{w}_j|$ tenim que:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_j | A \textstyle\sum_i c_i |\mathbf{w}_i\rangle &= \lambda \textstyle\sum_i c_i \langle \mathbf{w}_j | \mathbf{w}_i \rangle \\ \textstyle\sum_i c_i \langle \mathbf{w}_j | A | \mathbf{w}_i \rangle &= \lambda \textstyle\sum_i c_i S_{ij} \\ \textstyle\sum_i c_i A_{ij} &= \lambda \textstyle\sum_i c_i S_{ij} \\ \mathbb{A}\mathbb{C} &= \lambda \mathbb{S}\mathbb{C} \end{aligned} \tag{2}$$

Si la base és ortonormal, aleshores la mètrica és la identitat, $\mathbb{S} = \mathbb{I}$, i la representació matricial de l'equació d'autovalors simplement $\mathbb{A}\mathbb{C} = \lambda\mathbb{C}$