Algunes dades d'interès

- Integral: $\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
- Integral: $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$
- Límit: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- Relacions trigonomètriques:

  $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$; $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$

  $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$; $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$
- Element diferencial en coordenades esfèriques: $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

Càlcul de la integral de $I_n = \int_0^\infty r^n e^{-ar} dr$ amb $a > 0$

Procedim a integrar per parts,

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

Anomenem: $u = r^n$ i $dv = e^{-ar}$. Per tant, $du = nr^{n-1}$ i $v = -\frac{1}{a} e^{-ar}$. Aleshores

$$I_n = [uv]_0^\infty - \int_0^\infty v du = [r^n(-\frac{1}{a})e^{-ar}]_0^\infty + \frac{n}{a} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-ar} dr$$

És immediat que,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^n}{e^{ar}} = 0$$

L'altre límit,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^n}{e^{ar}}$$

és indeterminat. Per determinar-lo, derivem numerador i denominador de forma independent n vegades:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^n}{e^{ar}} = \lim_{r\to\infty} \frac{nr^{n-1}}{ae^{ar}} = \cdots = \lim_{r\to\infty} \frac{n!}{a^n e^{ar}} = 0$$

Aleshores,

$$I_n = \frac{n}{a} I_{n-1}$$

Reiterant la integració obtenim:

$$I_n = \frac{n}{a} I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} = \cdots = \frac{n!}{a^n} I_0$$

on $I_0 = \int_0^\infty e^{-ar} dr = \frac{1}{a}$. Per tant,

$$\boxed{I_n = \tfrac{n!}{a^{n+1}}}$$

Càlcul de la integral de $J_n = \int_0^\infty r^n e^{-ar^2} dr$ amb $a > 0$

Anàlogament, amb $u = r^{n-1}$ i $dv = re^{-ar}$, i càlcul similar de límits,

$$J_n = \frac{n-1}{2a} J_{n-2}$$

Ho pot fer la integral immediata J_1 i comprovar que $J_1 = \frac{1}{2a}$. Més complicada és J_0, que podem determinar indirectament calculant primer el seu quadrat $J_0^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-ar^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4a}$. Amb aquest resultat i reiterant la recurrència obtenim:

$$J_{2n+1} = \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-ar^2} dr = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

$$J_{2n} = \int_0^\infty r^{2n} e^{-ar^2} dr = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$