

Inspirant-nos en la forma que presenta l'energia lliure en la transició a través de punts crítics, plantejem la forma del potencial que permet la reducció espontània de simetria de camps escalars i en desenvolupar-ho, trobem el bosó sense massa de Goldstone.

Reducció espontània de simetria. EL bosó de Goldstone.

Josep Planelles

Transicions crítiques en sistemes termodinàmics

Quan estudiàvem en Termodinàmica el pas a través del punt crític d'un gas, és a dir, com, en baixar la temperatura, la fase homogènia del gas esdevenia inestable i, de manera espontània, se separaven dues fases, acudíem a l'energia lliure que escrivíem en termes temperatura i densitat¹ $F(T, \rho)$. Aleshores, en les rodalies del punt crític, expandíem l'energia lliure al voltant de la densitat crítica. Amb $\phi = \rho - \rho_c$, escrivíem $F(\phi) = F_0 + a(T) \phi^2 + b(T) \phi^4 + \dots$ on les potències senars no estaven presents perquè, en les rodalies del punt crític, fixada la temperatura, l'energia lliure és una funció parella de la densitat, $F(\phi) = F(-\phi)$, en no mostrar el sistema preferència per cap de les dues fases (líquid o gas).

Una equació formalment idèntica la trobàvem en les transicions paramagnetisme-ferromagnetisme en les rodalies de la temperatura crítica, on la magnetització era la variable de l'expansió en sèrie: $F = F_0 + a(T) M^2 + b(T) M^4 + \dots$

La clau de la transició crítica és la variació dels paràmetres a i b amb la temperatura. Permeten que, en les rodalies de la temperatura crítica, el coeficient del terme quadràtic, que és el terme dominant de la sèrie, tinga un canvi de signe a la T_c : $a(T) = a_0(T - T_c)$, mentre que el menor terme quàrtic s'assumeix aproximadament constant i positiu, passem de tindre un mínim quan a és positiu en la posició $\phi = 0$ ($M = 0$) —fase homogènia— a tindre un màxim en aquesta posició que separa dos mínims —les dues fases que se separen— quan el coeficient a és negatiu.²

El motiu últim és que la derivada $2a x + 4b x^3$ del polinomi $P(x) = P_0 + a x^2 + b x^4$ presenta tres arrels, $x = 0$, $x = \pm \sqrt{a/2b}$. Si fixem $b > 0$, resulta que si $a > 0$ sols hi ha la solució real $x = 0$ que és un mínim (la segona derivada és $2a + 12b x^2$ la qual si $x = 0$ queda $2a > 0$). Per contra, si $a < 0$, les tres solucions són reals, amb la particularitat que la solució $x = 0$ passa a ser un màxim perquè ara $a < 0$, mentre que les altres dos comprovem en substituir que són dos mínims.

Açò ens dona la clau per cercar una reducció espontània de simetria en teoria de camps, com mostrem al següent apartat.

Reducció espontània de simetria en un camp escalar real.

La Lagrangiana de un camp escalar real en unitats naturals ($c = \hbar = 1$) és: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - U(\phi)$ on l'índex μ corre sobre les quatre coordenades (x, y, z, t) del camp ϕ . El potencial del camp de Klein-Gordon és quadràtic en el camp $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2 \phi^2$, on m és la massa (o el gap en estat sòlid). Si el potencial tingués un terme quàrtic seria possible la reducció de simetria (separació de fases). Aleshores plantejem el potencial $U(\phi) = \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$, on els factors 2 i 4! podrien perfectament estar dins de m i λ , però que és costum presentar-los així. Aquest potencial presenta tan sols un mínim. Ara bé, si escrivim $U(\phi) = -\frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$ el potencial presenta dos mínims (degenerats) a $\phi_0 = \pm \sqrt{6m^2/\lambda}$.³ Quan el sistema té la mínima energia possible (estat fonamental que, en teoria de camps, s'anomena buit -*vacua*-) ha de triar estar en un dels dos mínims (no pot estar en els dos a la vegada), passant així el sistema a presentar menor

¹ Les variables naturals de l'energia lliure són temperatura i volum molar, però volum molar i densitat són equivalents en ser inverses una de l'altra.

² Detalls en J. Planelles, https://www3.uji.es/~planelle/APUNTS/TERMO/mes/FasesGas_van_der_Waals.pdf

³ El signe negatiu en el terme quadràtic, que és essencial per tenir la reducció de simetria, implica que el camp té una massa "imaginària" en el punt $\phi = 0$ (inestabilitat), cosa que condueix als dos mínims reals estables a costat i costat.

simetria que el seu potencial (i per tant menor simetria que la Lagrangiana), per a la qual la transformació $\phi_0 \rightarrow -\phi_0$ és una operació de simetria (el sistema quan està a l'estat fonamental perd la simetria $\mathbb{Z}_2$ que té la Lagrangiana. Diem que hi ha una reducció espontània de simetria). La ruptura de simetria és una propietat de l'estat fonamental no de la Lagrangiana, de la mateixa manera que en termodinàmica la reducció de simetria amb separació de fases la tenia el sistema que separava dues fases amb diferent densitat $\rho_{\pm} = \rho_c \pm \phi$ en cada fase, encara que l'energia lliure $F(\phi) = F_0 + a(T) \phi^2 + b(T) \phi^4$ presenta simetria respecte de la transformació $\phi \rightarrow -\phi$ que passa d'una fase a l'altra, canviant la densitat.

Reducció espontània de simetria. Camp escalar real de dos components (o escalar complex).

Com hem mostrat en uns apunts anteriors⁴ dos camps ϕ_1 i ϕ_2 reals diferents amb la mateixa massa (massa degenerada), cadascun solució de l'equació de Klein són equivalents a un camp complex $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$. Considerem aquest camp amb un terme quàrtic en el potencial,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_{\mu}\phi_1)^2 + (\partial_{\mu}\phi_2)^2] + \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

$\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2)$ presenta simetria axial sobre el pla ϕ_1, ϕ_2 . El potencial $U(\phi_1, \phi_2)$ és el típic barret mexicà amb un cercle definit per $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 6m^2/\lambda$ d'infinits punts mínims degenerats. Com quan deixes caure una boleta per aquest potencial, aquesta roda fins a triar un punt arbitrari en el cercle, el sistema tria un punt (ϕ_1, ϕ_2) del cercle. Arbitràriament triem $(+\sqrt{6m^2/\lambda}, 0)$ i expandim el potencial $U(\phi_1, \phi_2) = -\frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4!}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$ al voltant d'aquest punt. Definim doncs les noves variables $\phi'_1 = \phi_1 - \sqrt{6m^2/\lambda}$, $\phi'_2 = \phi_2$, tenim en compte que les primeres derivades són zero per ser un mínim, corregim l'origen del potencial restant la constant $U(\sqrt{6m^2/\lambda}, 0)$ i rebutgem termes superiors a segon derivada. Si calculem les segons derivades, $U''_i = \frac{\lambda}{4!}[8\phi_i^2 + 4(\phi_1^2 + \phi_2^2)] - m^2$, en el punt d'expansió $(\sqrt{6m^2/\lambda}, 0)$, trobem $U''_{\phi_1} = 2m^2$, $U''_{\phi_2} = 0$. Amb la qual cosa el potencial queda $U(\phi'_1, \phi'_2) = m^2(\phi'_1)^2 + \mathcal{O}(\phi'_1)^3$ i la Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_{\mu}\phi'_1)^2 + (\partial_{\mu}\phi'_2)^2] - m^2(\phi'_1)^2 + \mathcal{O}(\phi'_1)^3$$

L'equació anterior mostra que les partícules del camp ϕ'_1 tenen ara una massa $\mu = \sqrt{2} m$, mentre que, en no haver terme quadràtic en el camp ϕ'_2 , la massa de les partícules associades és zero, cosa que podem entendre físicament atès que moure's en la direcció del cercle dels mínims no té cap força en contra (la força és la component del gradient del potencial canviat de signe) i per tant la partícula no té cap inèrcia (massa zero), mentre que moure's en la direcció perpendicular suposa un increment del potencial i per tant actuar contra una força que ho impedeix, fent que el sistema mostri inèrcia (massa no nul·la). Fem notar que aquesta massa nul·la és conseqüència de la ruptura espontània de simetria. En física de la matèria condensada diem que les excitacions del camp ϕ'_2 no tenen *gap*.

L'equivalència dos camps ϕ_1 i ϕ_2 reals amb massa degenerada i un camp escalar complex, permet estendre el resultat que hem trobat als camp escalars complexos: La reducció de simetria canvia les masses, fent créixer una d'elles i fent zero l'altra.

Aquesta desaparició de la massa d'un dels modes és una manifestació del teorema de Goldstone que diu que en trencar-se una simetria contínua global, s'origina una excitació sense massa, o

⁴ J. Planelles, https://www3.uji.es/~planelle/APUNTS/QFT/quantificacio_del_camp.pdf

mode de Goldstone. A la partícula sense massa associada amb aquesta excitació se la coneix amb el nom de bosó de Goldstone.

Una característica extraordinària que sorgeix quan el trencament espontani de simetria afecta una simetria de gauge (com en el cas del camp electromagnètic) és que el mode sense massa de Goldstone desapareix, i en el seu lloc apareix un bosó de gauge massiu. Cal destacar que, abans Anderson, Higgs, Kibble, i altres, estudiaren el trencament de simetria en teories de gauge i descobriren aquest mecanisme (anomenat de Higgs) que converteix en massiu el mode de Goldstone, els físics de partícules estaven prou desconcertats en no trobar bosons de Goldstone en la natura.

Però tot açò ho comentarem en un apartat posterior, després d'introduir el camp electromagnètic com una camp de gauge.