La massa en teoria clàssica i quàntica de camps

1. La massa en teoria clàssica de camps (equació de Klein-Gordon)

La densitat Lagrangiana és funció de la velocitat (és a dir és funció de com varia el camp ϕ en variar les coordenades de l'espai-temps: $\partial_\mu \phi$) i aquesta funcionalitat entra en el terme cinètic $\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2$. També pot ser funció del valor del propi camp a través del terme d'energia potencial $U(\phi)$. Si considerem un potencial parabòlic $U = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, la densitat Lagrangiana resulta ser: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$. L'aplicació de les equacions d'Euler-Lagrange amb coordenades espai-temps,[1] $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0$, condueix a l'equació de Klein-Gordon: $(\partial^2 + m^2)\phi = 0$ on, ∂^2 inclou derivades en x, y, z, t. Concretament, amb el símbol ∂^2 incloem:[2] $\partial^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2$. L'equació té solucions en forma d'ones planes: $\phi = e^{-i(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$ amb la condició que $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$, on la quantitat m té el mateix paper que la massa en la relativitat, però la solució general és una superposició d'aquestes ones planes:

$$\phi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\,E_{\boldsymbol{p}}}} (A_{\boldsymbol{p}} e^{-i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} + A_{\boldsymbol{p}}^* e^{i(E_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})})$$

2. La massa en teoria quàntica de camps

Quan quantifiquem el camp ϕ,[3] en lloc dels coeficients clàssics $A_{\boldsymbol{p}}$, $A_{\boldsymbol{p}}^*$, introduïm els operadors d'aniquilació $a_{\boldsymbol{p}}$ i de creació $a_{\boldsymbol{p}}^+$, que donen compliment a les regles de commutació bosòniques $[a_{\boldsymbol{p}}, a_{\boldsymbol{q}}^+] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}, -\boldsymbol{q})$, amb les que l'operador Hamiltonià corresponent ($H = pq - L$) queda finalment escrit com un oscil·lador harmònic: $H = \int d^3p\, E_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}}^+ a_{\boldsymbol{p}}$.

L'estat fonamental (el buit) és l'estat sense partícules $|0\rangle$ i la primera excitació del camp correspon a un estat de partícula creada per $a_{\boldsymbol{p}}^+$: $|\boldsymbol{p}\rangle = a_{\boldsymbol{p}}^+|0\rangle$. L'energia d'aquest estat és $E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$, que correspon a la típica relació de dispersió relativista. En repòs, i.e., ($\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$), tenim $E = m$. Aquesta expressió ens diu que m és l'energia mínima d'una excitació del camp, i per tant es pot interpretar com la massa de la partícula associada.

En resum, en teoria clàssica, la massa apareix com un terme en l'equació de moviment, mentre que en teoria quàntica de camps, la massa correspon a l'energia mínima per excitar el buit i crear una partícula del camp. En estat sòlid el buit es correspon amb el nivell de Fermi i a l'energia mínima per excitar una quasipartícula des del nivell de Fermi és el gap. Per tant en estat sòlid el gap és l'anàleg de la massa en teoria de camps.

---

[1] És la generalització a 4 coordenades de l'equació per a $q(t)$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dq}{dt}\right)}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$

[2] El signe menys deriva de la mètrica relativista $g^{\mu\nu}(+,-,-,-)$ de l'espai de punts $\vec{s} = (ct, x, y, x)$ en quatre dimensions. La norma d'un vector d'un espai ortogonal real és la suma del quadrat de les seues components. En general però $(ds)^2 = ds^\mu ds_\mu = g^{\mu\nu} ds_\nu ds_\mu$. Formalment, amb $c = 1$, tenim: $\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2$.

[3] Al capítol 11 de Lancaster and Blundell, *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*, Oxford 2014, se detalla tot el procés de quantificació de l'equació de Klein-Gordon.