

Obtenim les equacions de Maxwell a partir de la Lagrangiana. Presentem el gauge com una simetria local i mostrem la reducció espontània de simetria del camp de gauge com generadora de partícules massives.

El camp electromagnètic (camp de gauge)

Reducció espontània de
simetria local

Josep Planelles

Una prèvia sobre notació

Un vector V^μ el podem representar amb una matriu columna de coordenades x^i . Si aquest vector està expressat en una base no ortogonal, $V^\mu = x^i \hat{u}_i$, on hem usat el criteri de suma sobre índexs repetits, aleshores el producte escalar amb un altre vector W^μ de components y^i inclou els productes dels vectors de la base: $x^i \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j y^j = x^i g_{ij} y^j$, on $g_{ij} = \hat{u}_i \cdot \hat{u}_j$ és la mètrica calculada pels productes escalars dels vectors de l'esmentada base.

Si definim el dual $V_\mu = x^i g_{ij}$, el quadrat de la norma és: $|V|^2 = V_\mu V^\mu = x_j x^j = x^j g_{ij} x^i$.

Considerem un tensor T com aquella magnitud que pot construir-se a partir de les coordenades de dos vectors. Aleshores, podem construir $T_{ij} = x_i x_j$, $T^{ij} = x^i x^j$, $T_i^j = x_i x^j$, que en teoria de relativitat s'anomenen tensors covariant, contravariant i mixt.¹

En teoria relativista els vectors tenen quatre dimensions i la mètrica no és Euclidiana però és diagonal $g_{ij} = \Lambda(1, -1, -1, -1)$. Per això, el vector moment és $p^\mu = (E, \mathbf{p})$, $p_\mu = (E, -\mathbf{p})$, el potencial vector $A^\mu = (V, \mathbf{A})$, $A_\mu = (V, -\mathbf{A})$, el gradient $\partial^\mu = (\partial_t, -\nabla)$, $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$ i les normes les calculem multiplicant el vector pel seu dual, per exemple $p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$, $\partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = \partial_t^2 - \nabla^2$.

Equacions de Maxwell i el tensor camp electromagnètic

En unitats naturals, $\epsilon_0 = \mu_0 = c = 1$, les equacions de maxwell són:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Si introduïm el potencial vector $\mathbf{A}$, podem escriure $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ i, des de la segon equació, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \rightarrow \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \rightarrow \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$. Per tant, $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

Definim el tensor camp electromagnètic $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, amb els índexs $\mu = 0, 1, 2, 3 \equiv t, x, y, z$. En notació matricial $F_{\mu\nu}$ resulta:³

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}; \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

En absència de càrregues i corrents, és a dir fent zero el vector corrent $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$, les equacions d'Euler-Lagrange amb la Lagrangiana $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$ generen les equacions de Maxwell. Si hi ha càrregues i corrents, per obtenir les equacions, cal incloure el vector densitat de corrent acoblat linearmet amb el potencial electromagnètic $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu$. La Lagrangiana és doncs una funció del potencial vector A^μ i les seues derivades. Per tant, l'equació d'Euler-Lagrange serà, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda A_\mu)} = 0$, amb el criteri de suma sobre índexs repetits.

¹ Més detalls en J. Planelles, <https://www3.uji.es/~planelle/APUNTS/TR/IntroductionTR.pdf>

² Usem coordenades naturals $c = 1$ mentre que no se explicita el contrari.

³ Fem alguna comprovació. Recordem que: $\partial^\mu = (\partial_t, -\nabla)$; $A^\mu = (V, \mathbf{A})$; $\partial_\mu = (\partial_t, \nabla)$; $A_\mu = (V, -\mathbf{A})$. Calculem $F_{xy} \equiv F_{12} = \partial_x(-A_y) - \partial_y(-A_x) = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z \equiv -B^3$; $F^{xy} \equiv F^{12} = -\partial_x(A_y) - \partial_y(A_x) = -B_z$; $F_{yt} \equiv F_{20} = \partial_y(V) - \partial_t(-A_y) = \partial_y V + \partial_t A_y = -E_y \equiv -E^2$; $F^{yt} \equiv F^{20} = -\partial_y(V) - \partial_t(A_y) = E_y$.

Al terme $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ sols hi ha derivades del potencial vector, per tant, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -J^\mu$.

Per altra banda, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} = -\frac{1}{4} \left(F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} + \frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} F_{\alpha\beta} \right)$.

De manera semblant a com calculem el dual d'un vector, podem calcular el dual d'un tensor fent l'operació dues voltes, és a dir, $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\gamma\delta}$.

Aleshores, $\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} F_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} F_{\alpha\beta} = \frac{\partial F_{\gamma\delta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} F^{\gamma\delta} = F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)}$. Per tant, veiem que els dos termes de la derivada anterior són iguals, amb la qual cosa,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)}$$

Atès que $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, tenim que $\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} = \delta_{\lambda\alpha} \delta_{\mu\beta} - \delta_{\lambda\beta} \delta_{\mu\alpha}$, per tant:

$$F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\lambda A_\mu)} = F^{\alpha\beta} (\delta_{\lambda\alpha} \delta_{\mu\beta} - \delta_{\lambda\beta} \delta_{\mu\alpha}) = F^{\lambda\mu} - F^{\mu\lambda} = 2F^{\lambda\mu}$$

La última igualtat deriva del caràcter antisimètric del tensor, com mostra la seua representació matricial que hem escrit abans. Amb tot l'equació d'Euler-Lagrange queda:

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = J^\mu$$

Aquesta equació que equival a les equacions de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ i $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Obtenim la primera equació de Maxwell des de $\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = J^\mu$ fent $\mu = 0$. Per tant cal derivar respecte de (t, x, y, z) la primera columna de $F^{\lambda 0} = (0, E^1, E^2, E^3)^T \equiv (0, E_x, E_y, E_z)^T$, amb la qual cosa obtenim: $\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \cdot \mathbf{E}$, que cal igualar-ho a $J^0 = \rho$, obtenint $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$. Anàlogament, considerem la coordenada x ($\mu = 1$). Cal derivar ara respecte de (t, x, y, z) la segon columna $(-E_x, 0, B_z, -B_y)^T$. Obtenim: $-\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y = J_x$ que és la component x de $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, anàlogament les altres dos components.

Les altres dues equacions de Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, deriven directament de la identitat de Bianchi:⁴ $\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0$. Per exemple, el cas $\alpha = 1, \mu = 2, \nu = 3$, implica $\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0$. Tenint en compte la numeració $(0,1,2,3) \equiv (t, x, y, z)$ dels índex de la matriu $F_{\mu\nu}$, trobem: $\partial_x(-B_x) + \partial_y(-B_y) + \partial_z(-B_z) = 0$, i.e., $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Incloent un índex temporal obtenim les tres components de l'equació de Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Per exemple, $\alpha = 0, \mu = 1, \nu = 2$, implica $\partial_t(-B_z) + \partial_x(-E_y) + \partial_y(E_x) = 0$, que és la component z de l'equació de Faraday. Les altres dues components les obtenim fent $(\alpha = 0, \mu = 1, \nu = 3)$ i $(\alpha = 0, \mu = 2, \nu = 3)$.

Camp de Gauge

Els camps elèctrics i magnètics són invariants respecte de l'elecció del *gauge* per al potencial vector A^μ . En efecte, la transformació $A^\mu = (V, \mathbf{A}) \rightarrow A'^\mu = (V - \partial_t \phi, \mathbf{A} - \nabla \phi)$, on $\phi(x, t)$ és una funció escalar, no altera els camps. Diem que el camp electromagnètic presenta invariància

⁴ $\partial_\alpha F_{\mu\nu} = \partial_\alpha (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \partial_\alpha \partial_\mu A_\nu - \partial_\alpha \partial_\nu A_\mu$. Aleshores, la suma dels tres termes, fent la corresponent permutació cíclica d'índexs per definir els altres dos, implica la cancel·lació de tots els termes i per tant, dona zero.

de *gauge*. Cal precisar, que la invariància de *gauge* no és una simetria en el sentit habitual sinó que reflecteix la impossibilitat de trobar un únic potencial A^μ per a un camp electromagnètic donat. En mecànica quàntica hi ha una incapacitat similar: el canvi $\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{i\alpha}$, amb $e^{i\alpha}$ una fase constant, no afecta els observables. No obstant, hi ha una diferència fonamental entre els dos casos: mentre que $\phi(x, t)$ pot variar de punt a punt, la fase α és *global* (idèntica a tot l'espai). Això permet distingir entre una *simetria global* (com la fase de la funció d'ona) i una *simetria local* (o de *gauge*), que actua de manera diferent en cada punt de l'espai.

Amb la finalitat d'aprofundir en la simetria de gauge, considerem un camp complex, la Lagrangiana del qual, $\mathcal{L} = (\partial^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi) - m^2 \psi^+ \psi$, és òbviament invariant sota el canvi $\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{i\alpha}$, on α és una constant. Aquesta simetria correspon al grup unitari en una dimensió $U(1)$.

Considerem ara una transformació *local* $\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{i\alpha(x)}$ on ara $\alpha(x)$ depèn de la posició. Observem que la Lagrangiana ja no és invariant.

En efecte, la derivada es transforma: $\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \partial_\mu \psi(x)e^{i\alpha(x)} = e^{i\alpha(x)}[\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x)]\psi(x)$, i l'altra derivada queda: $\partial^\mu \psi^+(x) \rightarrow \partial^\mu \psi^+(x)e^{i\alpha(x)} = e^{-i\alpha(x)}[\partial^\mu - i\partial^\mu \alpha(x)]\psi^+(x)$. Per tant, el terme cinètic de la Lagrangiana esdevé:

$$(\partial^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi) \rightarrow (\partial^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi) - i(\partial^\mu \alpha)\psi^+(\partial_\mu \psi) + i(\partial^\mu \psi^+)(\partial_\mu \alpha)\psi + (\partial^\mu \alpha)(\partial_\mu \alpha)\psi^+ \psi$$

Com era d'esperar, la dependència espacial d' $\alpha(x)$ fa que la Lagrangiana perga la simetria $U(1)$.

Ens preguntem com podem restaurar la simetria. Com la presència d' $\alpha(x)$ altera la derivada: $\partial_\mu \rightarrow [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x)]$, tractem d'introduir un "camp restaurador", definint⁵ la *derivada covariant*⁶ $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)$. Aquesta derivació restaura la simetria $U(1)$ sota la condició que $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha$. En efecte:

$$D_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x)]\psi \rightarrow [\partial_\mu + iqA_\mu(x) - i\partial_\mu \alpha]\psi(x)e^{i\alpha(x)} = e^{i\alpha(x)}D_\mu \psi(x)$$

És a dir, amb el canvi $\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{i\alpha(x)}$, $D_\mu \psi(x)$ passa a ser $e^{i\alpha(x)}D_\mu \psi(x)$. Per tant, el terme cinètic amb derivades covariants, $(D^\mu \psi^+)(D_\mu \psi)$ és invariant.

La Lagrangiana $\mathcal{L} = (D^\mu \psi^+)(D_\mu \psi) - m^2 \psi^+ \psi$ és, per tant, invariant sota dues transformacions: $\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{i\alpha(x)}$ i, simultàniament, $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha$. Una teoria que presenta aquest tipus d'invariància se diu *teoria de gauge* i el camp $A_\mu(x)$ *camp de gauge*.

Considerem ara la Lagrangiana completa, que inclou tant el camp de matèria com el camp de gauge, $\mathcal{L} = (D^\mu \psi^+)(D_\mu \psi) - m^2 \psi^+ \psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Aquesta Lagrangiana és invariant sota les transformacions: $\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{i\alpha(x)}$ i, simultàniament, $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu \alpha(x)$. Hi ha dues coses però que requereixen aclariment. La primera és que el camp de matèria conté derivades normals i no derivades covariants. La segon, és que la Lagrangiana electromagnètica conté un terme addicional de corrent. Aleshores què és la Lagrangiana anterior?

Si expandim $(D^\mu \psi^+)(D_\mu \psi) = (\partial^\mu \psi^+ - iqA^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi + iqA_\mu \psi)$, obtenim:

⁵ Separar el paràmetre q és en aquest punt arbitrari. Veurem després que és convenient fer-ho així per poder definir la càrrega o intensitat d'interacció.

⁶ Per tant $D^\mu = \partial^\mu - iqA^\mu(x)$

$$(D^\mu \psi^+)(D_\mu \psi) = \partial^\mu \psi^+ \partial_\mu \psi + iq(\partial^\mu \psi^+ A_\mu \psi - A^\mu \psi^+ \partial_\mu \psi) + q^2 A^\mu A_\mu \psi^+ \psi$$

La igualtat, $(\partial^\mu \psi^+ A_\mu \psi - A^\mu \psi^+ \partial_\mu \psi) = [(\partial^\mu \psi^+) \psi - \psi^+ \partial^\mu \psi] A_\mu$ permet **definir**:

$$J^\mu = -iq[(\partial^\mu \psi^+) \psi - \psi^+ \partial^\mu \psi]$$

i expressar el segon terme simplement: $-J^\mu A_\mu$, que correspon al terme de corrents en la Lagrangiana electromagnètica. Aquest terme descriu l'acoblament entre el camp de matèria ψ i el camp de gauge A_μ , de manera que J^μ és el corrent de càrrega del camp ψ i A_μ és el camp que interacciona amb la densitat de corrent J^μ .

Finalment, ha aparegut el terme $q^2 A^\mu A_\mu \psi^+ \psi$ representa una interacció del camp ψ amb el camp A_μ . Aquest terme és purament quàntic i no té un anàleg directe en la física clàssica (en el límit clàssic aquest terme quadràtic resulta rebutjable en front dels termes lineals).

Amb açò hem fet desaparèixer les derivades covariant, fet aparèixer derivades usals i fet aparèixer també el terme de corrent. Addicionalment, apareix també el petit terme $q^2 A^\mu A_\mu \psi^+ \psi$, que no té un anàleg directe en física clàssica i que és rebutjable davant del terme lineal $J^\mu A_\mu$.

Reducció de simetria en el camp de Gauge

Quan introduïrem la reducció espontània de simetria⁷ mostrarem la necessitat que el potencial inclogués un terme quàntic i que el terme quadràtic fos negatiu. Considerem doncs el potencial $U = -m^2 \psi^+ \psi + \lambda(\psi^+ \psi)^2$, de manera que la Lagrangiana queda:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \psi^+ - iqA^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi + iqA_\mu \psi) + m^2 \psi^+ \psi - \lambda(\psi^+ \psi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

la qual continua invariant sota les transformacions $\psi(x) \rightarrow \psi(x)e^{i\alpha(x)}$, $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha$ i que se correspon amb dos partícules de massa m associades amb ψ , ψ^+ i dos partícules sense massa (fotons) associades a $F^{\mu\nu}$.

Resulta convenient fer ús de l'ansatz $\psi(x) = \varrho(x)e^{i\theta(x)}$ per al camp. Amb aquest canvi:

$$\partial_\mu \psi + iqA_\mu \psi = (\partial_\mu \varrho)e^{i\theta} + i(\partial_\mu \theta + qA_\mu)\varrho e^{i\theta}$$

$$\partial^\mu \psi^+ - iqA^\mu \psi^+ = (\partial^\mu \varrho)e^{-i\theta} - i(\partial^\mu \theta + qA^\mu)\varrho e^{-i\theta}$$

Si definim $C_\mu = A_\mu + \frac{1}{q} \partial_\mu \theta$, aleshores $\partial_\mu \theta + qA_\mu = qC_\mu$ i $\partial^\mu \theta + qA^\mu = qC^\mu$. Amb açò tenim:

$$(\partial^\mu \psi^+ - iqA^\mu \psi^+)(\partial_\mu \psi + iqA_\mu \psi) = [(\partial_\mu \varrho) + i q \varrho C_\mu] e^{i\theta} [(\partial^\mu \varrho) - i q \varrho C^\mu] e^{-i\theta} = (\partial_\mu \varrho)^2 + q^2 \varrho^2 C_\mu C^\mu.$$

També, des de $\partial_\mu A_\nu = \partial_\mu C_\nu - \frac{1}{q} \partial_{\mu\nu} \theta$ i $\partial_\nu A_\mu = \partial_\nu C_\mu - \frac{1}{q} \partial_{\mu\nu} \theta$, podem reescriure el tensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$ i anàlogament $F^{\mu\nu}$, de manera que la Lagrangiana resulta:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varrho)^2 + q^2 \varrho^2 C^2 + m^2 \varrho^2 - \lambda \varrho^4 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

El potencial $U = -m^2 \varrho^2 + \lambda \varrho^4$ presenta el mínim a $\varrho_0 = \sqrt{m^2/2\lambda}$ independent del valor de θ . El sistema trenca espontàniament la simetria en triar un valor de θ . Diem arbitràriament $\theta_0 = 0$

⁷ Vegeu J. Planelles, <https://www3.uji.es/~planelle/APUNTS/QFT/SpontaneousSymmetryReduction.pdf>

i expandim al voltant d'aquest punt $(\varrho_0, 0)$. Aleshores anomenem $\varrho = \varrho_0 + \frac{\chi}{\sqrt{2}}$ i procedim a calcular els diferents termes. El terme cinètic és simplement: $(\partial_\mu \varrho)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2$

$$\text{El potencial } U(\varrho) = -m^2 \varrho^2 + \lambda \varrho^4 = m^2 \chi^2 + m\sqrt{\lambda} \chi^3 + \frac{1}{4} \chi^4 - \frac{m^4}{4\lambda}$$

$$\text{El terme d'interacció } q^2 \varrho^2 C^2 = q^2 C^2 (\varrho_0^2 + \sqrt{2} \varrho_0 \chi + \frac{1}{2} \chi^2).$$

La Lagrangiana aqueda:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - m^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda} m \chi^3 - \frac{1}{4} \chi^4 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + q^2 \varrho_0^2 C^2 + q^2 \sqrt{2} \varrho_0 \chi C^2 + q^2 \frac{1}{2} \chi^2 C^2 + \frac{m^4}{4\lambda},$$

Trobem doncs, el terme $-m^2 \chi^2$ que ens diu que el camp escalar χ presenta una massa $\sqrt{2}m$, el terme $q^2 \varrho_0^2 C^2$ diu que el camp de gauge C_μ té massa $M = \varrho_0 = \sqrt{m^2/2\lambda}$. A més apareixen termes d'interacció entre χ i C_μ , així com self-energies cúbiques i quàrtiques per a χ , més un terme constant.

Trobem una diferència substancial respecte de la reducció de simetria d'un camp escalar complex. En el cas del camp escalar complex, quan la simetria es redueix, dos camps inicialment degenerats de massa m donen lloc a un camp de massa $\sqrt{2}m$ i un camp de Goldstone sense massa. Tanmateix, en el cas present, el camp de Goldstone desapareix i és substituït per un camp massiu C_μ . Un simple canvi de variable $A_\mu + \frac{1}{q} \partial_\mu \theta = C_\mu$, que és una transformació gauge, ha fet desaparèixer la partícula de Goldstone. Per tant, si la partícula de Goldstone pot eliminar-se per una simple transformació de gauge és que en realitat no és un mode físic, és un mode que depèn de l'elecció del gauge. Per tant, realment no existeix, és un pur gauge.

Podem interpretar el mecanisme dient que els modes de Goldstone, en teoria sense massa, són eliminats per una transformació de gauge i absorbits pels bosons de gauge, dotant-los així de massa. Aquesta solució —on els Goldstones 'desapareixen' per donar massa als bosons— és un dels pilars de la física moderna: explica per què no n'observem a la natura i esdevé un dels pilars de la física moderna.

El mecanisme de Higgs en la ruptura espontània de la simetria electrofeble, encara que diferent, ofereix una altra via semblant: mentre que l'acoblament d'un camp escalar complex amb un camp de gauge 'engoleix' els Goldstone, l'acoblament del Higgs amb els camps fermiònics (com l'electró) via acoblament de Yukawa genera massa directament, sense Goldstones intermediaris. Aquesta doble via de la ruptura espontània de simetria —gauge i Yukawa— explica l'estructura fonamental de masses de l'univers.

Incloem per finalitzar un model mecànic simple, *toyModel*, que pot ajudar a visualitzar com la interacció pot atorgar massa al bosó de Goldstone: Una partícula està restringida a moure's per un cercle en absència de potencials. La partícula és lliure. Imaginem que està en una determinada ubicació. L'acció de la més mínima força la fa moure's de la posició on estava. És a dir no presenta cap inèrcia (no té massa). El sistema constituït per la bola amb la restricció de no poder escapar del cercle presenta simetria axial. Per tant, el moment angular L_z se conserva. Ara imaginem que variem externament les condicions del cercle que confina la partícula introduint un acoblament entre la partícula i el cercle que li impedeix accelerar lliurement. L'acoblament actua com una força de restitució $F = -k\dot{\theta}$ que s'oposa als canvis en el moviment. Ara, la partícula resisteix canvis en la seva velocitat (adquireix inèrcia), com si tingués massa. El moment angular L_z no se conserva i se perd la simetria axial. Tots els punts del cercle, encara que geomètricament són equivalents, no ho són dinàmicament. La partícula, per interaccionar amb el cercle, adquireix inèrcia. Ja no té la massa nul·la.

Apèndix 1: Electromagnetisme Axionic

Hem vist abans que, en absència de càrregues i corrents, les equacions d'Euler-Lagrange, amb la Lagrangiana $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$, generen les equacions de Maxwell. Aquestes equacions són invariants quan els camps elèctric i magnètic $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ es mesclen per l'acció d'una rotació d'un angle arbitrari θ . Tot i que aquesta rotació canvia la Lagrangiana (podem comprovar fàcilment que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cos 2\theta + \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \sin 2\theta$), les equacions de Maxwell no varien. Per exemple, la rotació genera $\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cos \theta + \mathbf{B} \sin \theta$. Si calculem la divergència $\nabla \cdot \mathbf{E}' = \nabla \cdot \mathbf{E} \cos \theta + \nabla \cdot \mathbf{B} \sin \theta$. Com $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ i també $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, concloem que $\nabla \cdot \mathbf{E}' = 0$. Anàlogament podem comprovar la invariància de les altres equacions. Per tant, podríem dir que el terme $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ és un terme invisible en electrodinàmica clàssica.

F. Wilczek introdueix un camp escalar θ (que no és una constant sinó un camp, el camp axiònic) que interacciona amb aquest terme: $\mathcal{L}_{axion} = \mathcal{L} - \kappa \theta \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. Aleshores, la interacció d'aquest camp θ amb el terme $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ genera la física nova que se pot observar en semiconductors topològics on camp elèctric i magnètic s'influencien mútuament.⁸

Apèndix 2: Electromagnetisme massiu

Acabem de comentar que la Lagrangiana $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ descriu l'electromagnetisme en absència de càrregues i corrents. Si afegim un terme massiu a la Lagrangiana, de manera que les partícules del camp (els fotons) passen a ser massives, $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}A^\mu A_\mu$, i injectem aquesta Lagrangiana en les equacions d'Euler-Lagrange en lloc de trobar les equacions de Maxwell, $\partial_\lambda F^{\lambda\mu} = 0$, trobem les equacions de Proca: $\partial_\lambda F^{\lambda\mu} + m^2 A^\mu = 0$. La solució estàtica de l'equació de Proca en el límit no relativista és el potencial de Yukawa, similar al potencial electromagnètic però amb un decaïment exponencial degut al terme de la massa. En certs medis polaritzables no lineals, els modes del camp electromagnètic poden mostrar termes de massa efectiva. Tanmateix, en semiconductors molt polaritzables, la interacció dels electrons amb la xarxa dona lloc a polarons que interaccionen entre sí amb potencials tipus Yukawa (potencials de Haken).⁹

⁸ Una introducció senzilla en J. Planelles, *Axion Electrodynamics in Topological Insulators for beginners*, arXiv: 2111.07290

⁹ Veure per exemple, J.L. Movilla, J.I. Clemente i J. Planelles, *Nanoscale Adv.* 5 (2023), 6093.