Introducció d'urgència dels operadors de creació/aniquilació

Josep Planelles

February 10, 2015

1 Del moment angular

Definim l'operador $\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\,\hat{J}_y$. És immediat comprovar que:

$$\begin{aligned}[\widehat{J^2}, \hat{J}_+] &= [\widehat{J^2}, \hat{J}_x] + i\,[\widehat{J^2}, \hat{J}_y] = 0 + i\,0 = 0 \\ [\hat{J}_z, \hat{J}_+] &= [\hat{J}_z, \hat{J}_x] + i\,[\hat{J}_z, \hat{J}_y] = i\,\hat{J}_y + i\,(-i\,\hat{J}_x) = \hat{J}_x + i\,\hat{J}_y = \hat{J}_+ \end{aligned} \tag{1}$$

Comprovem l'acció d'aquest operador sobre un estat $|JM\rangle$:

$$\begin{aligned}\widehat{J^2}\;\hat{J}_+|JM\rangle &= \hat{J}_+\;\widehat{J^2}|JM\rangle = J(J+1)\;\hat{J}_+\,|JM\rangle \\ \hat{J}_z\;\hat{J}_+|JM\rangle &= \hat{J}_+\;(\hat{J}_z + 1)\;|JM\rangle = (M+1)\;\hat{J}_+\,|JM\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

Per tant concloem que $\hat{J}_+|J,M\rangle = k\;|J,M+1\rangle$, on k és una constant.

Anàlogament, $\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\,\hat{J}_y$, $\hat{J}_-|J,M\rangle = k'\,|J,M-1\rangle$.

Finalment, atès que $\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$ concloem que: $\langle J_1 M_1|\hat{J}_x|J_2 M_2\rangle \propto \delta_{J_1,J_2}\delta_{M_1,M_2\pm 1}$.

2 De l'oscil·lador harmònic

Definim els operadors:

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\xi - \frac{d}{d\xi}) \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\xi + \frac{d}{d\xi}), \tag{3}$$

on $x = a\,\xi$, $a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. És a dir, ξ representa la coordenada en les unitats que permeten escriure l'Hamiltonià en la forma simple:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\,\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\,\xi^2\right]. \tag{4}$$

Per substitució directa és immediat comprovar que:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\,(b^+\,b + \frac{1}{2}) \qquad [b^+, b] = b^+\,b - b\,b^+ = 1 \qquad [\hat{\mathcal{H}}, b^+] = \hat{\mathcal{H}}, b^+ - b^+\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\,b^+ \tag{5}$$

Comprovem l'acció de l'operador b^+ sobre un estat $|v\rangle$:

$$\hat{\mathcal{H}}\,b^+\,|v\rangle = b^+\,(\hat{\mathcal{H}} + \hbar\omega)\,|v\rangle = \hbar\omega\,(v + \frac{1}{2} + 1)\,b^+\,|v\rangle \tag{6}$$

per tant, $b^+|v\rangle = k|v+1\rangle$ on k és una constant.

Anàlogament, podem comprovar que $[\hat{\mathcal{H}}, b] = -\hbar\omega\,b$. Amb aquest resultat i de manera anàloga trobem que $b|v\rangle = k'|v-1\rangle$, on k' és una constant.

Finalment, escrivint la coordenada ξ en termes de creadors i aniquiladors, $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(b^+ + b)$ comprovem que:

$$\langle v|\xi|v'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle v|(b + b^+)|v'\rangle \propto \delta_{v,v'\pm 1}. \tag{7}$$